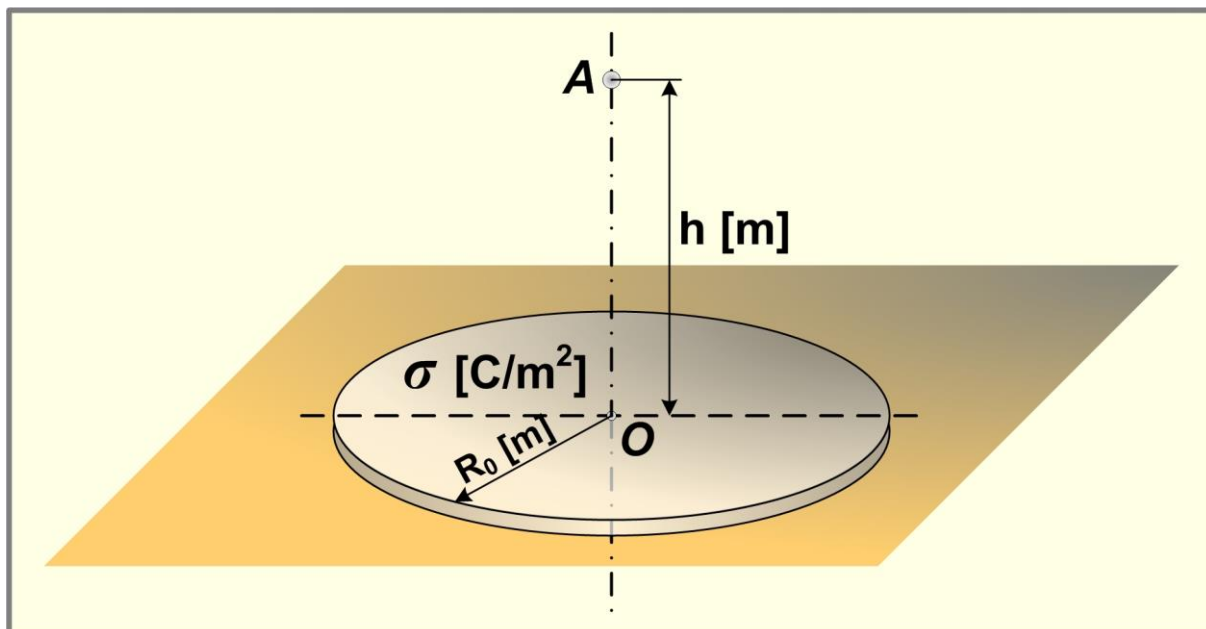


Да се намери напрегнатостта на електростатичното поле $\vec{E}_A$ на разстояние h [m] по оста на тънък диск с радиус R [m], зареден с равномерно с повърхностно разпределен заряд σ [C/m²].



Фиг.1.

Дадено :

$$R \text{ [m]}; h \text{ [m]}; \sigma \text{ [C/m}^2\text{]}$$

Да се намери :

$$E_A \text{ [V/m]}; \vec{E}_A$$

Решение :

Поставяме началото на координатната система в центъра O на кръга, като оста OZ е перпендикулярна на равнината на кръга. Осите OX и OY избираме произволно (фиг.2).

Разглеждаме безкрайно малка площ dS [m²] от повърхността на диска, със страни dl [m] и dR [m] (фиг.2):

$$(1) dS = dl \cdot dR \text{ [m}^2\text{]}$$

От дефиницията за ъгъл, представен в радиани :

$$d\alpha = \frac{dl}{R} \text{ [rad]}$$

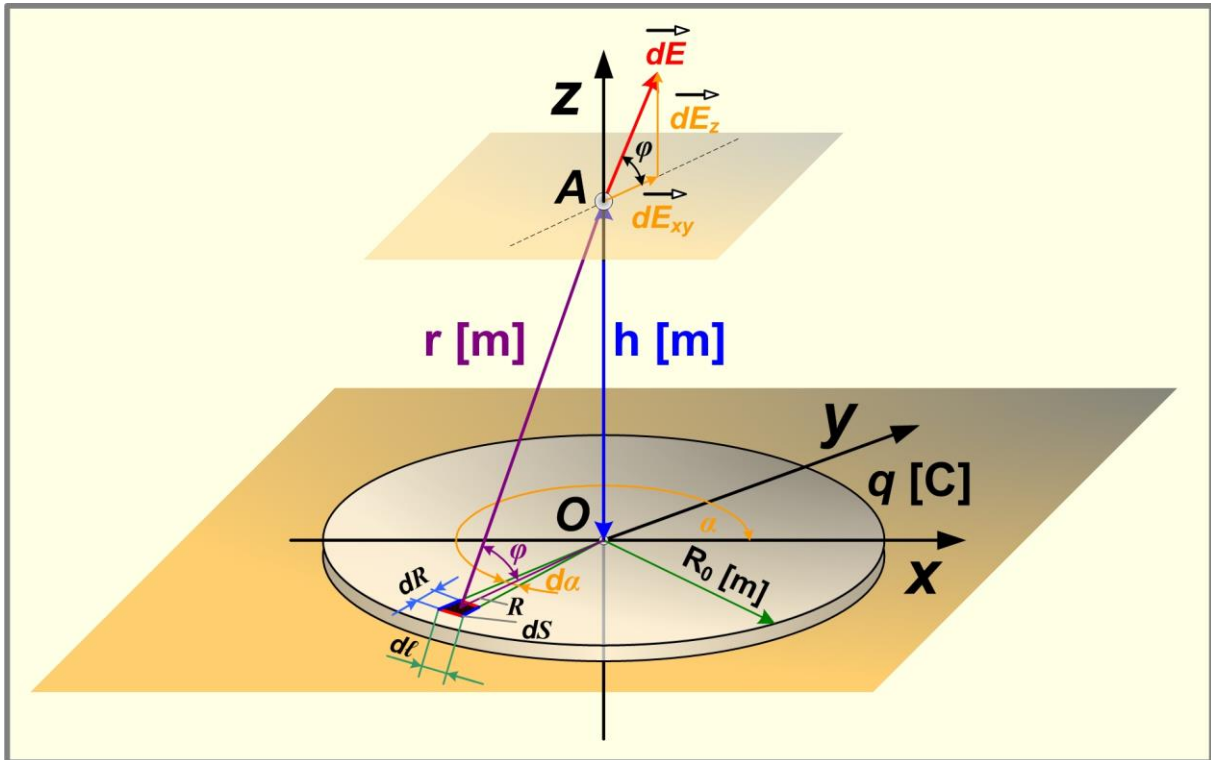
$$(2) dl = R \cdot d\alpha \text{ [m]}$$

Заместваме в (1) :

$$(3) dS = R.d\alpha.dR [m^2]$$

Елементарната площ $dS [m^2]$ ще има заряд :

$$(4) dq = \sigma.dS [C]$$



Фиг.2.

Заместваме изразът за $dS [m^2]$ от (3) в (4) :

$$(5) dq = \sigma.R.dR.d\alpha [C]$$

Зарядът dq считаме за точков и създаваната от него напрегнатост на електростатичното поле в точка A, определяме по формулата

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right] :$$

$$(6) dE = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma.R.dR.d\alpha}{r^2} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Изразяваме r по Питагоровата теорема, чрез R и h (фиг.2) :

$$r^2 = R^2 + h^2 [m^2]$$

$$(7) r = \sqrt{R^2 + h^2} [m]$$

Заместваме (7) в (5) :

$$(8) dE = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{R.dR}{R^2 + h^2} .d\alpha \left[\frac{V}{m} \right]$$

Проектираме вектора $\vec{dE}$ върху равнината XOY (dE_{xy}) :

$$dE_{xy} = dE \cdot \cos(\varphi) [V/m]$$

$$\text{Но : } \cos(\varphi) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} [-]$$

$$(9) \quad dE_{xy} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot dE [V/m]$$

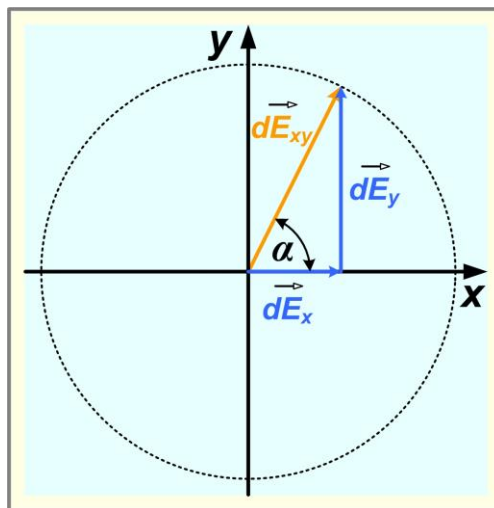
Проектираме вектора $\vec{dE}$ върху осите OX и OY :

$$dE_x = dE_{xy} \cdot \cos(\alpha) [V/m]$$

$$(10) \quad dE_x = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot dE \cdot \cos(\alpha) [V/m]$$

$$dE_y = dE_{xy} \cdot \sin(\alpha) [V/m]$$

$$(11) \quad dE_y = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot dE \cdot \sin(\alpha) [V/m]$$



Фиг.3.

Заместваме изразът за dE от (8) в (10) и (11) :

$$dE_x = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{R^2 + h^2} \cdot dR \right) \cdot [\cos(\alpha) \cdot d\alpha] [V/m]$$

$$(12) \quad dE_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dR \right] \cdot [\cos(\alpha) \cdot d\alpha] [V/m]$$

$$dE_y = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{R^2 + h^2} \cdot dR \right) \cdot [\sin(\alpha) \cdot d\alpha] [V/m]$$

$$(13) \quad dE_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dR \right] \cdot [\sin(\alpha) \cdot d\alpha] [V/m]$$

За да намерим проекцията по оста ***OX*** интегрираме **(12)**, като вземем в предвид границите на изменение на ъгълът $\alpha \in [0, 2\pi]$ и на радиусът $R \in [0, R_0]$:

$$(14) \int_0^{E_x} dE_x = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \int_{R=0}^{R=R_0} \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\cos(\alpha) d\alpha] \cdot \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dR \right] [V / m]$$

Правило за интегриране на константа по функция :

$$(15) \int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx, \text{ където } c = const$$

([ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ПРАВИЛОТО](#))

Прилагаме правилото в **(14)** :

$$(16) \int_0^{E_x} dE_x = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R=0}^{R=R_0} \left[\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \cos(\alpha) \cdot d\alpha \right] \cdot \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dR [V / m]$$

Първият интеграл е табличен от вида :

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

([ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ИНТЕГРАЛА](#))

Вторият интеграл е табличен от вида :

$$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + C$$

([ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ИНТЕГРАЛА](#))

Третият интеграл е от вида :

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right| - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

([ВИЖ ПРЕСМЯТАНЕТО НА ИНТЕГРАЛА](#))

В граници интегралите имат вида :

(17)	$\int_{x_0}^{x_1} 1 \cdot dx = x_1 - x_0$
(18)	$\int_{x_0}^{x_1} \cos(x) \cdot dx = \sin(x_1) - \sin(x_0)$
(19)	$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dx = \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + a^2} + x_1}{\sqrt{x_0^2 + a^2} + x_0} \right) + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + a^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}}$

Прилагаме интегралите в **(16)** :

$$E_x - 0 = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\sin(2\pi) - \sin(0)] \cdot \left[\ln \left(\frac{\sqrt{R_0^2 + h^2} + R_0}{\sqrt{0^2 + h^2} + 0} \right) + \frac{0}{\sqrt{0^2 + h^2}} - \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right] [V / m]$$

$$E_x = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot [0 - 0] \left[\ln \left(\frac{\sqrt{R_0^2 + h^2} + R_0}{h} \right) - \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right] [V / m]$$

$$(20) E_x = 0$$

За да намерим проекцията по оста **OY** интегрираме (13), като вземем в предвид границите на изменение на ъгълът $\alpha \in [0, 2.\pi]$ и на радиусът $R \in [0, R_0]$:

$$(21) \int_0^{E_y} dE_y = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2.\pi} \int_{R=0}^{R=R_0} \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot [\sin(\alpha).d\alpha] \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] [V / m]$$

Прилагаме правилото за интегриране на константа по функция (15) :

$$(22) \int_0^{E_y} dE_y = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha=0}^{\alpha=2.\pi} \int_{R=0}^{R=R_0} [\sin(\alpha).d\alpha] \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] [V / m]$$

Вторият интеграл е табличен от вида :

$$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

В граници интегралът има вида :

$$(23) \int_{x_0}^{x_1} \sin(x).dx = -\cos(x_1) + \cos(x_0)$$

Прилагаме интегралите в (17), (19) и (23) в (22) :

$$E_y - 0 = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot [-\cos(2.\pi) + \cos(0)] \left[\ln \left(\frac{\sqrt{R_0^2 + h^2} + R_0}{\sqrt{0^2 + h^2} + 0} \right) + \frac{0}{\sqrt{0^2 + h^2}} - \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right] [V / m]$$

$$E_y = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot [-1 + 1] \left[\ln \left(\frac{\sqrt{R_0^2 + h^2} + R_0}{h} \right) - \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right] [V / m]$$

$$(24) E_y = 0$$

Следователно независимо от височината на точка **A**, напрегнатостта на магнитното поле по осите **OX** и **OY** ще е нула, което следва и от съображенията за симетрия.

Проектираме вектора $\vec{dE}$ по оста **OZ** :

$$(25) dE_z = dE.\sin(\varphi)$$

Заместваме изразът за **dE** от (8) в (25) :

$$(26) dE_z = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{R.dR}{R^2 + h^2} .d\alpha.\sin(\varphi) \left[\frac{V}{m} \right]$$

Както се вижда от фиг.2 :

$$(27) \sin(\varphi) = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad [-]$$

Заместваме (27) в (26) :

$$(28) dE_z = \frac{\sigma}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{R.dR}{R^2 + h^2} .d\alpha \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$(28) dE_z = \frac{\sigma.h}{4.\pi.\varepsilon_0} .d\alpha \cdot \left[\frac{R}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] \left[\frac{V}{m} \right]$$

За да намерим проекцията по оста **OZ** интегрираме (28), като вземем в предвид границите на изменение на ъгълът $\alpha \in [0, 2.\pi]$ и на радиусът $R \in [0, R_0]$:

$$(29) \int_0^{E_z} dE_z = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2.\pi} \int_{R=0}^{R=R_0} \frac{\sigma.h}{4.\pi.\varepsilon_0} .d\alpha \cdot \left[\frac{R}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] \left[\frac{V}{m} \right]$$

Прилагаме правилото за интегриране на константа по функция (15) :

$$(30) \int_0^{E_z} dE_z = \frac{\sigma.h}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha=0}^{\alpha=2.\pi} \int_{R=0}^{R=R_0} d\alpha \cdot \left[\frac{R}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] \left[\frac{V}{m} \right]$$

Прилагаме табличният интеграл (17) :

$$(31) E_z - 0 = \frac{\sigma.h}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \int_{R=0}^{R=R_0} (2.\pi - 0) \cdot \left[\frac{R}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \right] \left[\frac{V}{m} \right]$$

Прилагаме правилото за интегриране на константа по функция (15) :

$$(32) E_z - 0 = \frac{\sigma.h}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot 2.\pi \cdot \int_{R=0}^{R=R_0} \frac{R}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .dR \left[\frac{V}{m} \right]$$

Това е интеграл от вида :

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} .dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

([виж пресмятането на интеграла](#))

В граници интеграла има вида :

$$(33) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} .dx = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}}$$

Прилагаме интеграла (33) в (32) :

$$E_z = \frac{\sigma \cdot h}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$E_z = \frac{\sigma \cdot h}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$(34) \quad E_z = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$

Тъй като E_z е единствената проекция на $\vec{E}$ различна от нула то $E = E_z$:

$$(35) \quad E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$

Търсеният вектор на напрегнатостта на електростатичното поле в точка A ще бъде:

$$(36) \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \cdot \vec{k} \left[V/m \right]$$

Където $\vec{k}$ е ортата на оста OZ

При :

$$h = 0 \rightarrow E(0) = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \left[V/m \right];$$

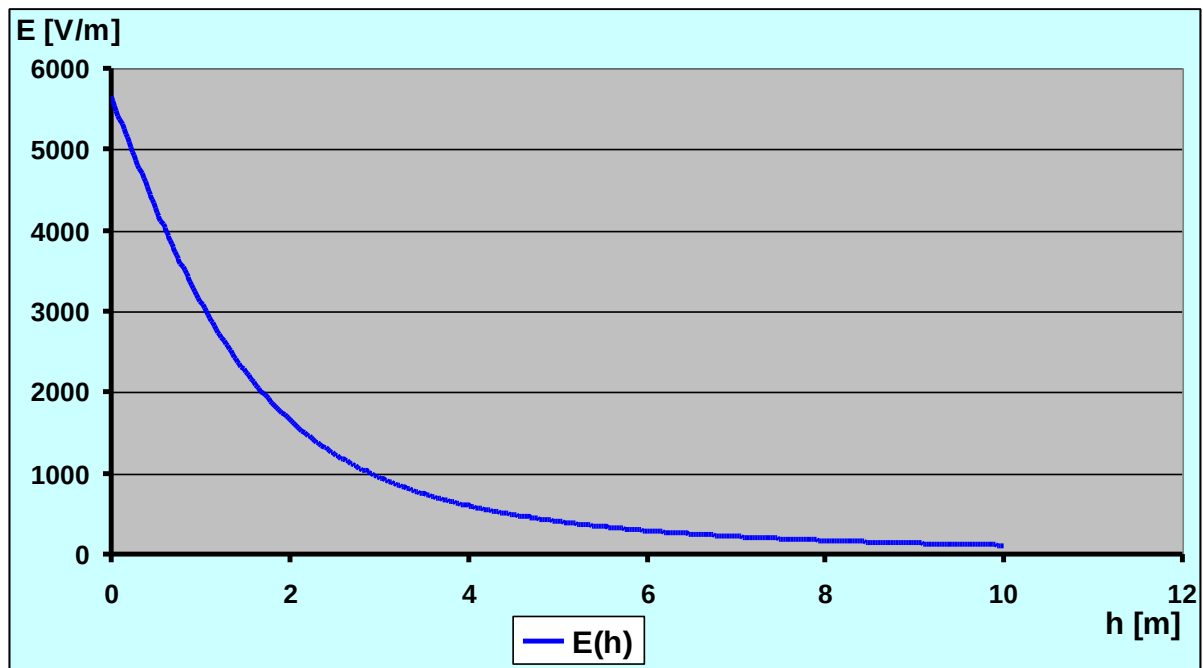
$$h \rightarrow \infty \rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} = 1 \Rightarrow E(\infty) \rightarrow 0$$

$$R_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \rightarrow 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \left[V/m \right] \quad - \quad \text{напрегнатостта на}$$

електростатичното поле на безкрайна , равномерно заредена тънка пластина.

При конкретни параметри :

$$R = 2 \text{ [m]}; \quad h = 1 \text{ [m]}; \quad q = 0,1 \text{ [}\mu\text{C / m}^2\text{]}$$



Графика.1.

Графика на изменение на напрегатостта на електростатичното поле по оста OZ. $h_1 = 0[m]$ до $h_2 = 10[m]$.

Решение в Excel

Отговор :
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} \right) \cdot \vec{k} \text{ [V/m]}$$