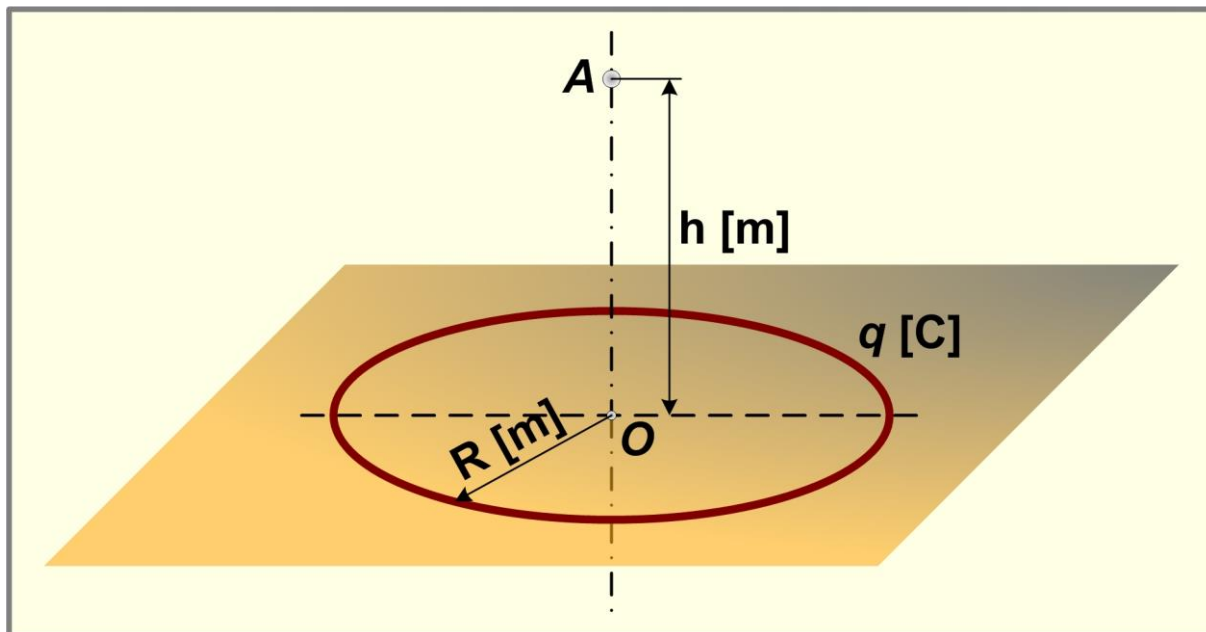


Тънка нишка има форма на окръжност с радиус $R [m]$ и е заредена с равномерно разпределен заряд $q [C]$. Намерете вектора на напрегнатостта на електростатичното поле $\vec{E}_A$ в точка A от ос, минаваща през центъра на кръга и перпендикулярна на равнината му фиг.1, на разстояние $h [m]$. Намерете максималната стойност, до която достига напрегнатостта на електростатичното поле по тази ос.



Фиг.1.

Дадено :

$$R [m]; h [m]; q [C]$$

Да се намери :

$$\vec{E}_A; E_{\max}(h) [V/m]$$

Решение :

Поставяме началото на координатната система в центъра O на кръга, като оста OZ е перпендикулярна на равнината на кръга. Осите OX и OY избираме произволно (фиг.2).

Отделяме безкрайно малка част от нишката, с дължина $dl [m]$, с електрически заряд равен на :

$$(1) dq = \tau \cdot dl [C]$$

Където :

$$(2) \tau = \frac{q}{2\pi \cdot R} [C/m] \text{ е линейната плътност на заряда.}$$

Зарядът dq считаме за точков и създаваната от него напрегнатост на електростатичното поле в точка A , определяме по формулата

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right] :$$

$$(3) \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dl}{r^2} \left[\frac{V}{m} \right]$$

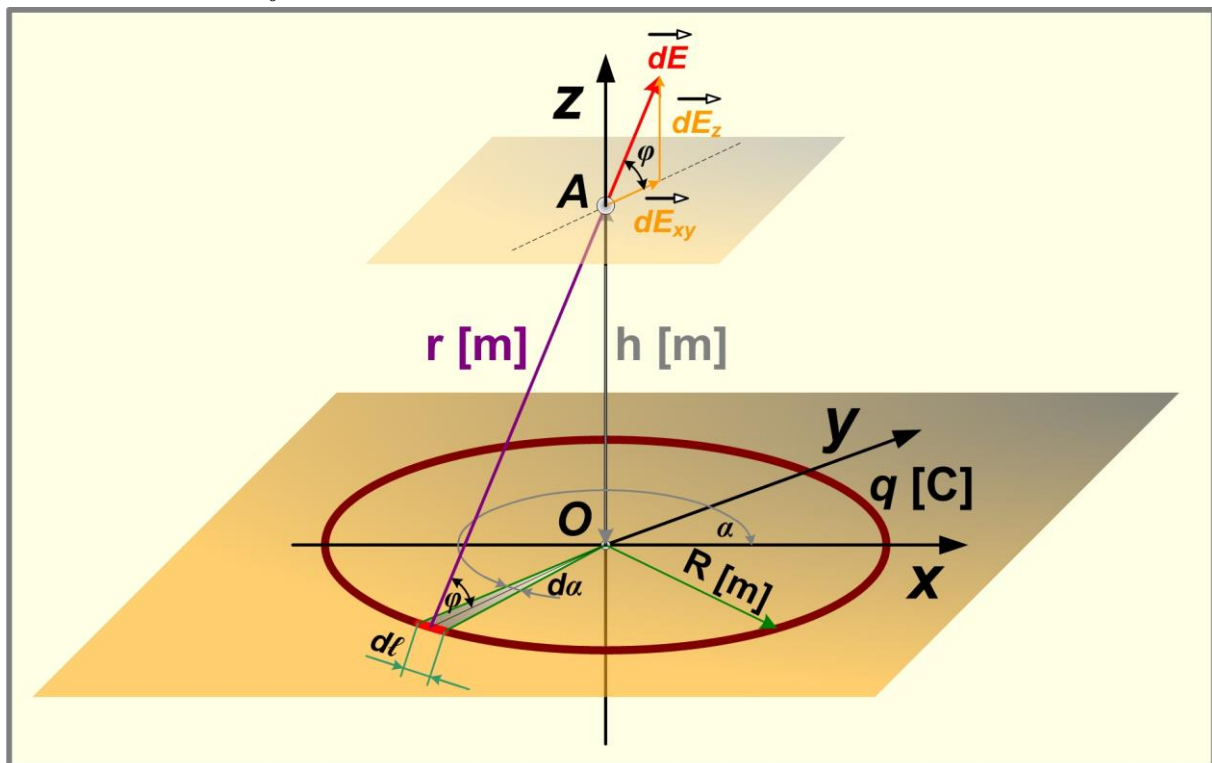
От дефиницията за ъгъл, представен в радиани :

$$d\alpha = \frac{dl}{R} \text{ [rad]}$$

$$(4) \quad dl = R \cdot d\alpha \text{ [m]}$$

Заместваме (4) в (3) :

$$(5) \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} \cdot R \cdot d\alpha \left[\frac{V}{m} \right]$$



Фиг.2.

Проектираме вектора $\vec{dE}$ върху равнината XOY ($\vec{dE}_{xy}$) :

$$dE_{xy} = dE \cdot \cos(\varphi) \text{ [V / m]}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{r} \text{ [-]}$$

$$(6) \quad dE_{xy} = \frac{R}{r} \cdot dE \text{ [V / m]}$$

Проектираме вектора $\vec{dE}$ върху осите OX и OY :

$$dE_x = dE_{xy} \cdot \cos(\alpha) [V/m]$$

$$(7) dE_x = \frac{R}{r} \cdot dE \cdot \cos(\alpha) [V/m]$$

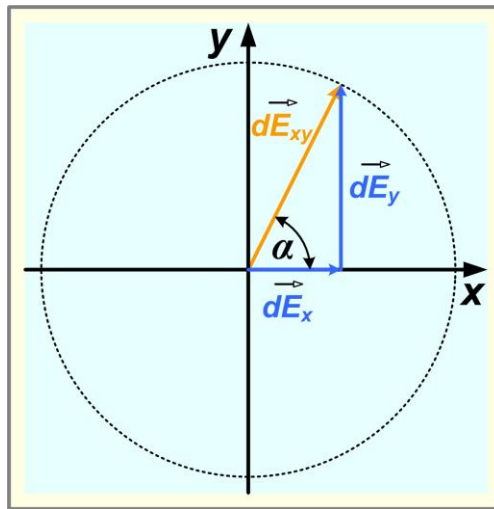
$$dE_y = dE_{xy} \cdot \sin(\alpha) [V/m]$$

$$(8) dE_y = \frac{R}{r} \cdot dE \cdot \sin(\alpha) [V/m]$$

Заместваме изразът за dE от (5) в (7) и (8) :

$$(9) dE_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} \cdot R \cdot \frac{R}{r} \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha [V/m]$$

$$(10) dE_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} \cdot R \cdot \frac{R}{r} \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha [V/m]$$



Фиг.3.

Интегрираме (9) и (10), като вземем в предвид границите на изменение на ъгълът $\alpha \in [0, 2\pi]$:

$$(11) \begin{aligned} \int_0^{E_x} dE_x &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha [V/m] \\ \int_0^{E_y} dE_y &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha [V/m] \end{aligned}$$

Правило за интегриране на константа по функция :

$$(12) \int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx, \text{ където } c = \text{const}$$

([виж доказателство на правилото](#))

Прилагаме правилото в (11) :

$$(13) \begin{aligned} \int_0^{E_x} dE_x &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \cdot d\alpha [V/m] \\ \int_0^{E_y} dE_y &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) \cdot d\alpha [V/m] \end{aligned}$$

Това са таблични интеграли от вида :

$$\int 1.dx = x + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

$$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

$$\int \cos(x).dx = \sin(x) + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

В граници интегралите имат вида :

(14)	$\int_{x_0}^{x_1} 1.dx = x_1 - x_0$
(15)	$\int_{x_0}^{x_1} \sin(x).dx = -\cos(x_1) + \cos(x_0)$
(16)	$\int_{x_0}^{x_1} \cos(x).dx = \sin(x_1) - \sin(x_0)$

Прилагаме табличните интеграли в (13) :

$$E_x - 0 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot [\sin(2.\pi) - \sin(0)] = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot [0 - 0] \text{ [V / m]}$$

$$E_y - 0 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot [-\cos(2.\pi) + \cos(0)] = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^3} \cdot R^2 \cdot [-1 + 1] \text{ [V / m]}$$

$$(17) E_x = 0$$

$$(18) E_y = 0$$

Следователно независимо от височината на точка **A**, напрегнатостта на магнитното поле по осите **OX** и **OY** ще е нула, което следва и от съображенията за симетрия.

Проектираме вектора $\vec{dE}$ по оста **OZ** :

$$(19) dE_z = dE \cdot \sin(\varphi) \text{ [V / m]}$$

Заместваме изразът за **dE** от (5) в (19) :

$$(20) dE_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} \cdot R \cdot \sin(\varphi) \cdot d\alpha \text{ [V / m]}$$

Както се вижда от фиг.2 :

$$(21) \sin(\varphi) = \frac{h}{r} \text{ [-]}$$

Заместваме (21) в (20) :

$$dE_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} \cdot R \cdot \frac{h}{r} \cdot d\alpha \quad [V/m]$$

$$(22) \quad dE_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau.R.h}{r^3} \cdot d\alpha \quad [V/m]$$

Интегрираме (22), като вземем в предвид границите на изменение на ъгълът $\alpha \in [0, 2.\pi]$:

$$(23) \quad \int_0^{E_z} dE_z = \int_0^{2.\pi} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau.R.h}{r^3} \cdot d\alpha \quad [V/m]$$

Прилагаме правилото за интегриране на константа по функция (12) :

$$(24) \quad \int_0^{E_z} dE_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau.R.h}{r^3} \cdot \int_0^{2.\pi} d\alpha \quad [V/m]$$

Прилагаме табличният интеграл (14) в (24) :

$$E_z - 0 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau.R.h}{r^3} \cdot (2.\pi - 0) \quad [V/m]$$

$$(25) \quad E_z = \frac{1}{2.\varepsilon_0} \cdot \tau \cdot \frac{R.h}{r^3}$$

Заместваме в (25) изразът за τ от (2) :

$$E_z = \frac{1}{2.\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{2.\pi.R} \cdot \frac{R.h}{r^3} \quad [V/m]$$

$$(26) \quad E_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{q.h}{r^3} \quad [V/m]$$

Както се вижда от фиг.2 :

$$(27) \quad r = \sqrt{h^2 + R^2} \quad [m]$$

Заместваме (27) в (26), като вземем в предвид, че $E_x = 0$ и $E_y = 0$:

$$(28) \quad E(h) = E_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{q.h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [V/m]$$

Следователно търсеният вектор на напрегнатостта на електростатичното поле в точка **A** ще бъде :

$$(29) \quad \vec{E} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{q.h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k} \quad [V/m]$$

Където $\vec{k}$ е ортата на оста **OZ**

При $h = 0$, $E(h) = 0$. При $h \rightarrow \infty$, $E(h) \rightarrow 0$ следователно функцията $E(h)$ има екстремум. За да намерим при кое h $E(h)$ има максимална стойност, диференцираме $E(h)$ спрямо h .

$$(30) \frac{dE(h)}{dh} = \frac{d}{dh} \left[\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \left[\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \left[\frac{V}{m^2} \right]$$

Използваме правилото за производна на константа по функция, $c = const$.

$$(31) (c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))'$$

([виж доказателството на правилото](#))

Прилагаме правилото в (30) :

$$(32) \frac{dE(h)}{dh} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \left[\frac{V}{m^2} \right]$$

Използваме правилото за производна на частно от две функции : $g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f(x)' \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)'}{g(x)^2}$$

([виж доказателството на правилото](#))

Прилагаме правилото в (32) :

$$(33) \left[\frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' = \frac{h' \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]'}{\left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]^2}$$

Това са таблични производна от вида :

$$(34) (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(35) [(u(x))^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot (u(x))'$$

([виж намирането на производната](#))

Прилагаме табличните производни в (33) :

$$(36) h' = 1 \cdot h^{1-1} = 1$$

$$(37) \left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2} \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}-1} \cdot (h^2 + R^2)'$$

Използваме правилото за производна на сума/разлика на две функции $f(x)$ и $g(x)$.

$$(f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'$$

([ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ПРАВИЛОТО](#))

Прилагаме правилото в (37) :

$$(38) \left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2} \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[(h^2)' + (R^2)' \right]$$

Използваме правилото за производна на константа $c = const$.

$$(c)' = 0$$

([ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ПРАВИЛОТО](#))

Прилагаме правилото в (38) , $R = const$:

$$(39) \left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2} \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[(h^2)' + 0 \right]$$

Прилагаме табличната производна (34) в (39) :

$$(40) \left[(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2} \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot h^{2-1} = 3 \cdot h \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

Заместваме (36) и (40) в (33) :

$$\begin{aligned} \left[\frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' &= \frac{1 \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot 3 \cdot h \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + R^2)^3} = \frac{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot h^2 \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + R^2)^3} = \\ (41) &= \frac{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot h^2 \cdot (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + R^2)^3} = \frac{(h^2 + R^2)^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)} - 3 \cdot h^2 \cdot 1}{(h^2 + R^2)^{\left(3 - \frac{1}{2}\right)}} = \frac{(h^2 + R^2)^1 - 3 \cdot h^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= \frac{R^2 - 2 \cdot h^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Заместваме (41) в (32) :

$$(42) \frac{dE(h)}{dh} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2 \cdot h^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{V}{m^2} \right]$$

Функцията $E(h)$ има екстремум в точката, в която първата и производна е равна на нула, тоест :

$$\begin{aligned} \frac{dE(h)}{dh} &= \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2 \cdot h^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \left[\frac{V}{m^2} \right] \\ R^2 - 2 \cdot h^2 &= 0 \left[m^2 \right] \end{aligned}$$

$$(43) \quad h = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad [m]$$

Максималната стойност на напрегнатостта на електростатичното поле ще получим като заместим h от (43) в (28) :

$$E_{\max} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot \frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + R^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad [V/m]$$

$$E_{\max} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{q}{\left(R^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right)^{\frac{3}{2}}} \quad [V/m]$$

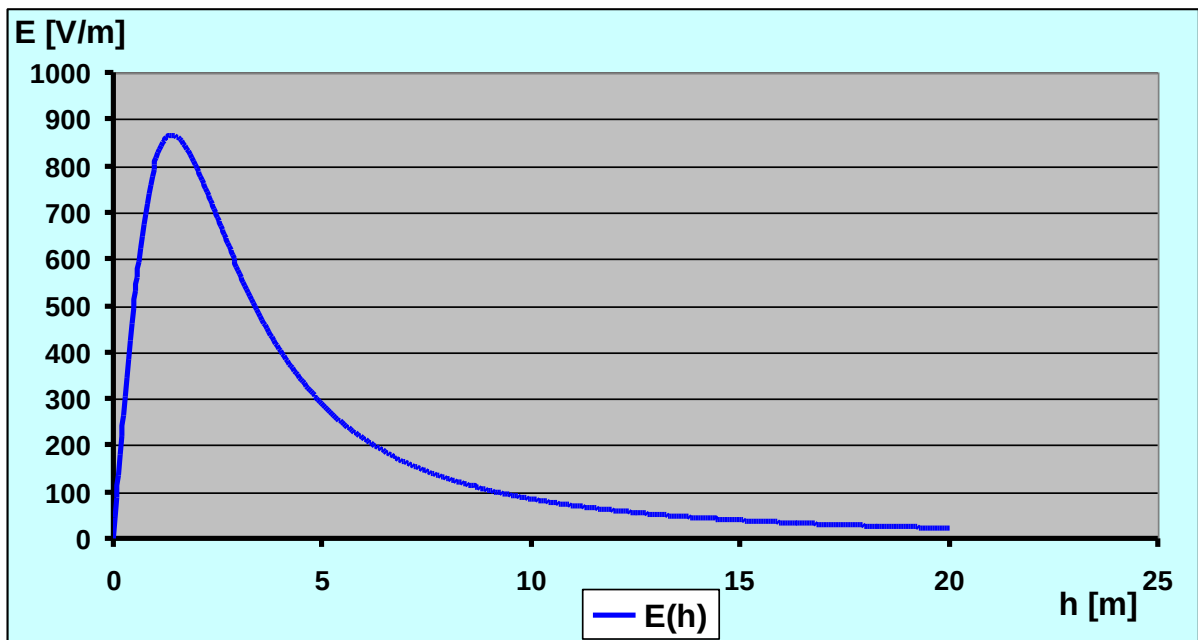
$$E_{\max} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{q}{R^3 \cdot (\sqrt{3})^3} \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{R^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} \quad [V/m]$$

$$(44) \quad E_{\max} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \quad [V/m]$$

Заместваме с конкретните стойности :

$$R = 2 \quad [m]; \quad h = 1 \quad [m]; \quad q = 3 \quad [\mu C]$$

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1,4142 \quad [m]; \quad E_{\max} = 2594,48 \quad [V/m]$$



Графика.1.

Графика на изменение на напрегнатостта на електростатичното поле по оста OZ. $h_1 = 0[m]$ до $h_2 = 20[m]$.

Решение в Excel

Отговор :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k} \text{ [V/m]}; E_{\max} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \text{ [V/m]}, \text{ при } h = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ [m]}$$