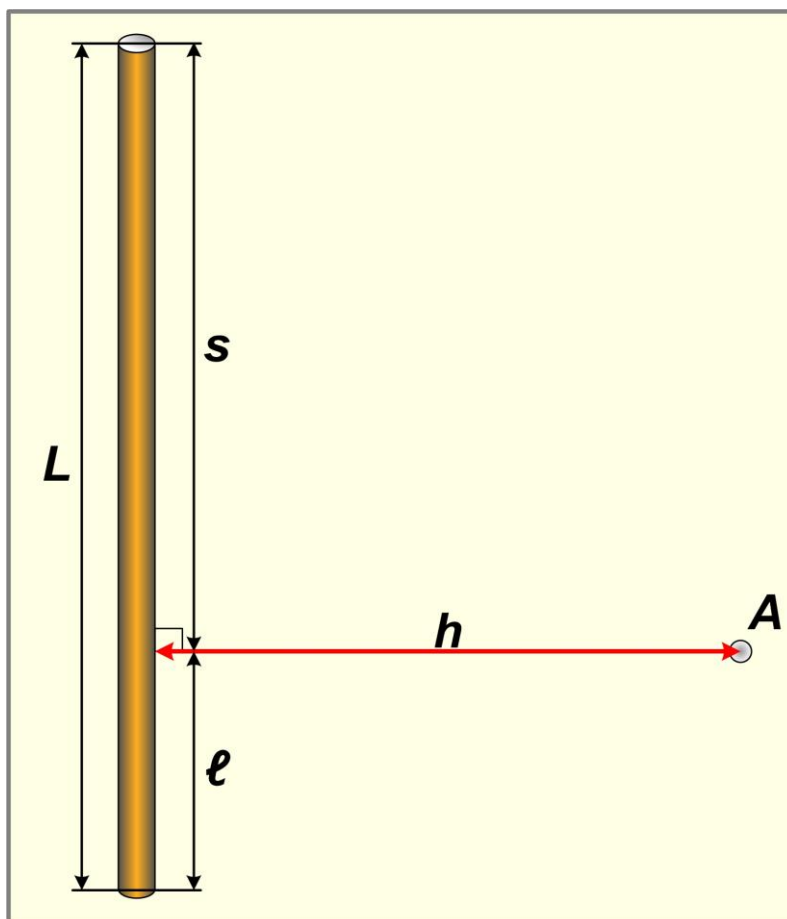


Правна нишка с дължина L [m] е заредена равномерно с положителен заряд, с плътност на заряда τ [C/m]. Намерете напрегнатостта на електростатичното поле в точка A - E_A [V/m], ако е дадено че най-късото разстояние от точка A до нишката е h [m], а разстоянието от перпендикуляра от точка A до нишката и единият и край е s [m] фиг.1.



Фиг.1.

Дадено :

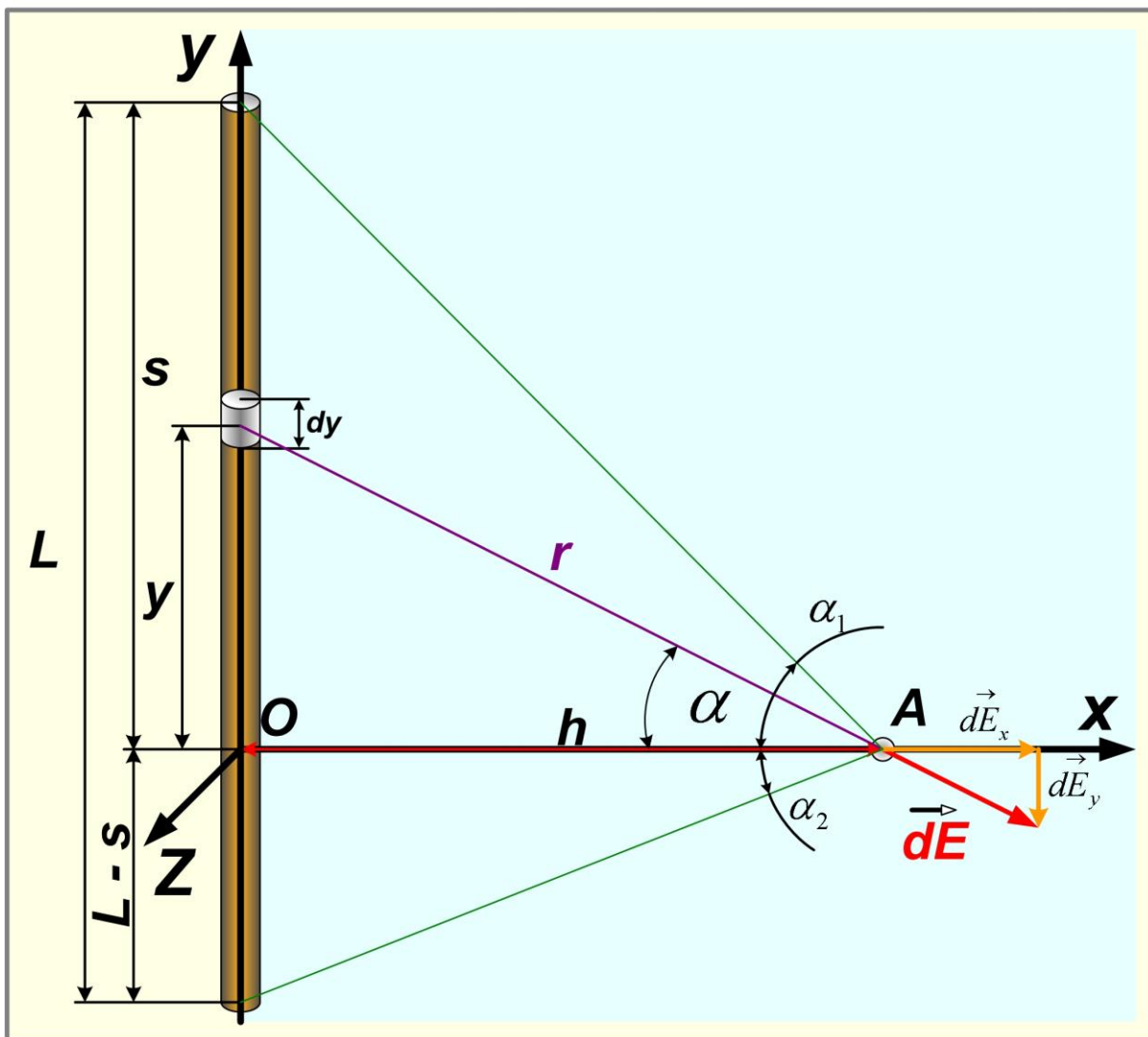
$$L \text{ [m]}; h \text{ [m]}; s \text{ [m]}; \tau \text{ [C/m]}$$

Да се намери :

$$E_A = ? \text{ [V/m]}$$

Решение

Поставяме началото на координатната система в основата на перпендикуляра от точка A към нишката, оста OY по направление на нишката, а оста OX от нишката към точка A , фиг.2 (за нагледност на схемата нишката е представена като тънък цилиндър).



Фиг.2.

На произволно разстояние $y[\text{m}]$ от началото на координатната система, отделяме безкрайно малък участък от нишката $dy[\text{m}]$, чийто заряд $dq = \tau \cdot dy [\text{C}]$ можем да разглеждаме като точков. Този заряд ще създава в точка A напрегнатост на електростатичното поле $dE[\text{V/m}]$, който определяме по формулата

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] :$$

$$(1) \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot dy}{r^2} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right], \text{ където } r[\text{m}] \text{ е разстоянието от точка } A \text{ до}$$

участъкът от нишката dy .

От фиг.2 се вижда, че можем да изразим r по питагоровата теорема :

$$(2) \quad r = \sqrt{h^2 + y^2} = \frac{h}{\cos(\alpha)} [m]$$

Заместваме изразът за r от (2) в (1):

$$dE = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{\left(\frac{h}{\cos(\alpha)}\right)^2} \cdot dy \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$(3) dE = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot dy \left[\frac{V}{m} \right]$$

Вектора $\vec{dE}$ лежи изцяло в равнината XOY и неговите проекции са съответно :

$$(4) dE_x = dE \cdot \cos(\alpha) \left[V / m \right]$$

Заместваме изразът за dE от (3) в (4) :

$$(5) dE_x = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \cos^3(\alpha) \cdot dy \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$(6) dE_y = dE \cdot \sin(\alpha) \left[V / m \right]$$

Заместваме изразът за dE от (3) в (6) :

$$(7) dE_y = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot dy \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$(8) dE_z = 0 \left[V / m \right]$$

Пълното значение на проекциите на вектора на напрегнатостта на електростатичното поле ще получим като сумираме приноса на всички безкрайно малки участъци dy , тоест изчислявайки интеграл по цялата дължина на нишката. Интегрирането ще е много по-просто, ако в качеството на променлива вместо y използваме ъгълът α . Използваме връзката между y и α – фиг.2:

$$(9) y = h \cdot \tan(\alpha) \left[m \right]$$

За целта диференцираме (9) спрямо α :

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} [h \cdot \tan(\alpha)] \left[\frac{m}{rad} \right]$$

Използваме правилото за производна на константа по функция, $c = const$.

$$(10) (c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))'$$

([виж доказателството на правилото](#))

Прилагаме правилото в (9) :

$$(11) \frac{dy}{d\alpha} = h \cdot \frac{d}{d\alpha} [\tan(\alpha)] \left[\frac{m}{rad} \right]$$

Това е таблична производна от вида :

$$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

([виж намирането на производната](#))

Прилагаме табличната производна в (11) :

$$(12) \frac{dy}{d\alpha} = h \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \left[\frac{m}{rad} \right]$$

Разделяме променливите :

$$(13) dy = \frac{h}{\cos^2(\alpha)} \cdot d\alpha [m]$$

Заместваме изразът за dy от (13) в (5) и (7) :

$$dE_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \cos^3(\alpha) \cdot h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha$$

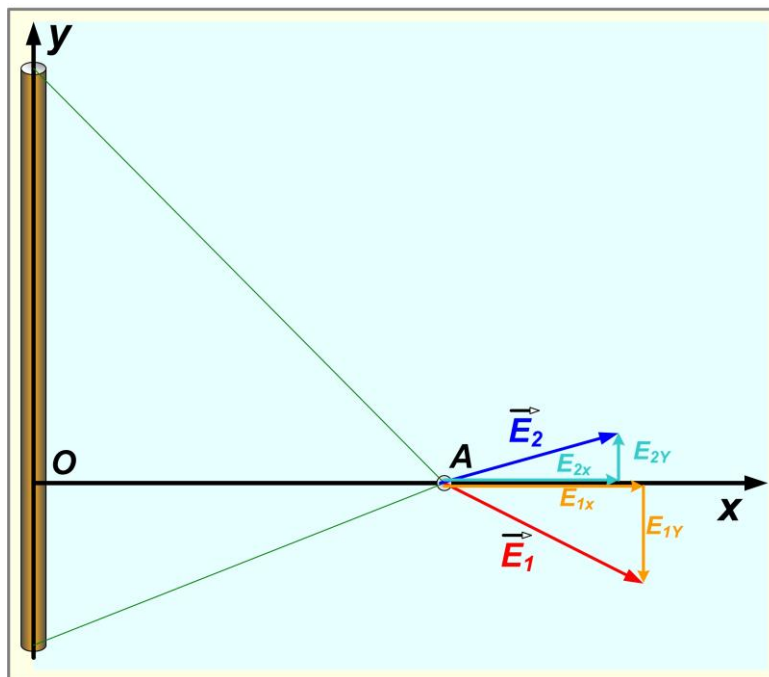
$$(14) dE_x = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha$$

$$dE_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha$$

$$(15) dE_y = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha$$

Разделяме нишката на две части – горна (от горният край до точка O - $\alpha \in [0, \alpha_1]$) и долна (от точка O , до долният край $\alpha \in [0, \alpha_2]$). Горната част ще създава напрегнатост на електростатичното $\vec{E}_1$, а долната - $\vec{E}_2$, като според принципа на суперпозицията, векторната им сума ще даде търсената напрегнатост в точка A (фиг.3), тоест :

$$(16) \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Фиг.3.

За да намерим $\vec{E}_1$ ще определим проекциите му по осите OX и OY , като интегрираме (14) и (15) в граници $\alpha \in [0, \alpha_1]$:

$$(17) \quad \begin{aligned} \int_0^{E_{1x}} dE_x &= \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \cos(\alpha) d\alpha \quad [V/m] \\ \int_0^{E_{1y}} dE_y &= \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Правило за интегриране на константа по функция :

$$(18) \quad \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, \text{ където } c = \text{const}$$

([виж доказателство на правилото](#))

Прилагаме правилото в (17) :

$$(19) \quad \begin{aligned} \int_0^{E_{1x}} dE_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \int_0^{\alpha_1} \cos(\alpha) d\alpha \quad [V/m] \\ \int_0^{E_{1y}} dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \int_0^{\alpha_1} \sin(\alpha) d\alpha \quad [V/m] \end{aligned}$$

Това са таблични интеграли от вида :

$$\int 1 dx = x + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

([виж доказателството на интеграла](#))

В граници интегралите имат вида :

$$(20) \quad \int_{x_0}^{x_1} 1 dx = x_1 - x_0$$

$$(21) \quad \int_{x_0}^{x_1} \sin(x) dx = -\cos(x_1) + \cos(x_0)$$

$$(22) \quad \int_{x_0}^{x_1} \cos(x) dx = \sin(x_1) - \sin(x_0)$$

Прилагаме табличните интеграл в (19) :

$$E_{1x} - 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [\sin(\alpha_1) - \sin(0)] \quad [V/m]$$

$$E_{1y} - 0 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [-\cos(\alpha_1) + \cos(0)] [V / m]$$

$$(23) E_{1x} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha_1) [V / m]$$

$$(24) E_{1y} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [1 - \cos(\alpha_1)] [V / m]$$

Аналогично намираме $\vec{E}_2$ като определяме проекциите му по осите **OX** и **OY**, като интегрираме (14) и (15) в граници $\alpha \in [0, \alpha_2]$:

$$(25) \begin{aligned} \int_0^{E_{2x}} dE_x &= \int_0^{\alpha_2} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha [V / m] \\ \int_0^{E_{2y}} dE_y &= \int_0^{\alpha_2} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha) \cdot d\alpha [V / m] \end{aligned}$$

Прилагаме правилото за интегриране на константа по функция (18) :

$$(26) \begin{aligned} \int_0^{E_{2x}} dE_x &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \int_0^{\alpha_2} \cos(\alpha) \cdot d\alpha [V / m] \\ \int_0^{E_{2y}} dE_y &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \int_0^{\alpha_2} \sin(\alpha) \cdot d\alpha [V / m] \end{aligned}$$

Прилагаме табличните интегралы (20) ÷ (22) в (26) :

$$\begin{aligned} E_{2x} - 0 &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [\sin(\alpha_2) - \sin(0)] [V / m] \\ E_{2y} - 0 &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [-\cos(\alpha_2) + \cos(0)] [V / m] \\ (27) E_{2x} &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha_2) [V / m] \\ (28) E_{2y} &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [1 - \cos(\alpha_2)] [V / m] \end{aligned}$$

Проектираме векторното уравнение (16) върху осите **OX** и **OY** (фиг.3):

$$(29) E_x = E_{1x} + E_{2x}$$

$$(30) E_y = -E_{1y} + E_{2y}$$

Заместваме проекциите на векторите (23) и (27) в (29) :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha_1) + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin(\alpha_2) [V / m] \\ (31) E_x &= \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot [\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)] [V / m] \end{aligned}$$

Заместваме (24) и (28) в (30) :

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [1 - \cos(\alpha_1)] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [1 - \cos(\alpha_2)] [V/m]$$

$$(32) E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)] [V/m]$$

Модулът на вектора на напрегнатостта на електростатичното поле в точка *A* ще намерим по Питагоровата теорема :

$$(33) E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} [V/m]$$

Заместваме (31) и (32) в (33) :

$$E = \sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)] \right]^2 + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)] \right]^2} [V/m]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sqrt{[\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)]^2 + [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)]^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sqrt{P} [V/m]$$

$$(34) E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sqrt{P}, \text{ където } P = [\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)]^2 + [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)]^2 [V/m]$$

Преобразуваме изразът *P* :

$$P = [\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)]^2 + [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)]^2 =$$

$$= [\sin^2(\alpha_1) + 2\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2)] + [\cos^2(\alpha_1) - 2\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_2)] =$$

$$= [\sin^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_1)] + [\sin^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_2)] + 2\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - 2\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)$$

Основни тригонометрични формули :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

([виж формулите](#))

Преобразуване на произведение в алгебричен сбор :

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

([виж формулите](#))

$$(35) P = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] - 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] =$$

$$= 2 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 2 - 2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 2[1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Понижаване степента на синуса :

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

([виж формулите](#))

$$(36) \quad 1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Заместваме (36) в (35) :

$$(37) \quad P = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Заместваме (37) в (34) :

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) [V/m]$$

$$(38) \quad E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) [V/m]$$

$$\text{Където : } \alpha_1 = \arctg\left(\frac{s}{h}\right); \alpha_2 = \arctg\left(\frac{L-s}{h}\right)$$

При безкрайно голяма нишка : $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) [V/m]$$

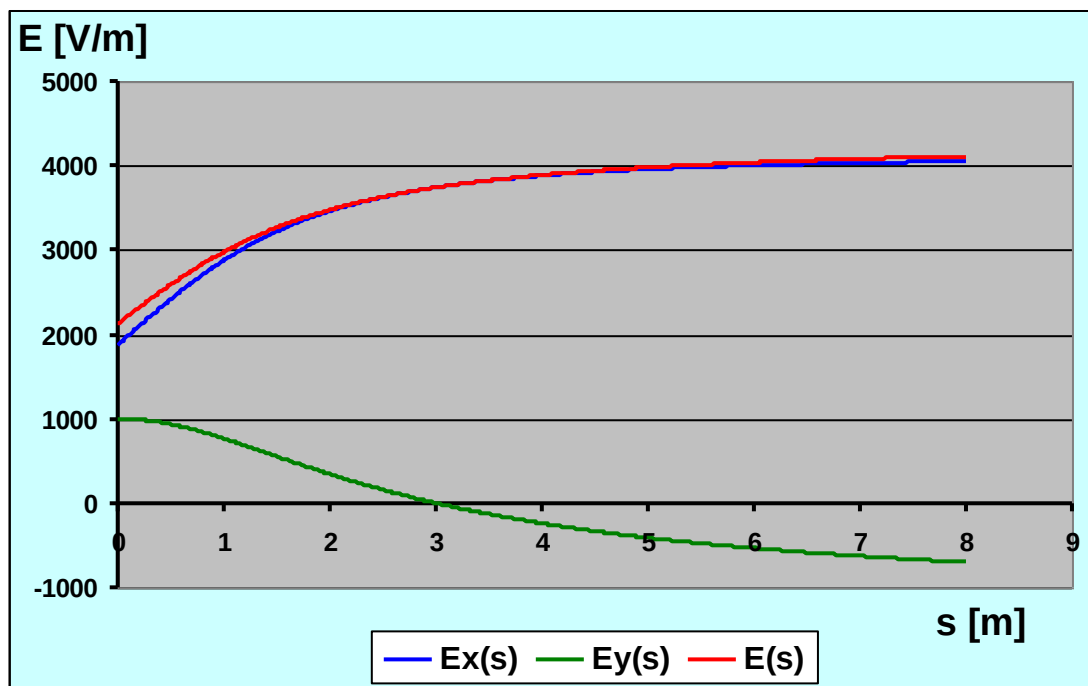
$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} [V/m]$$

Забележка : Същият резултат за напрегнатостта на електростатичното поле, получаваме и при отрицателно заредена нишка.

С цел визуализация, взимаме следните конкретни стойности :

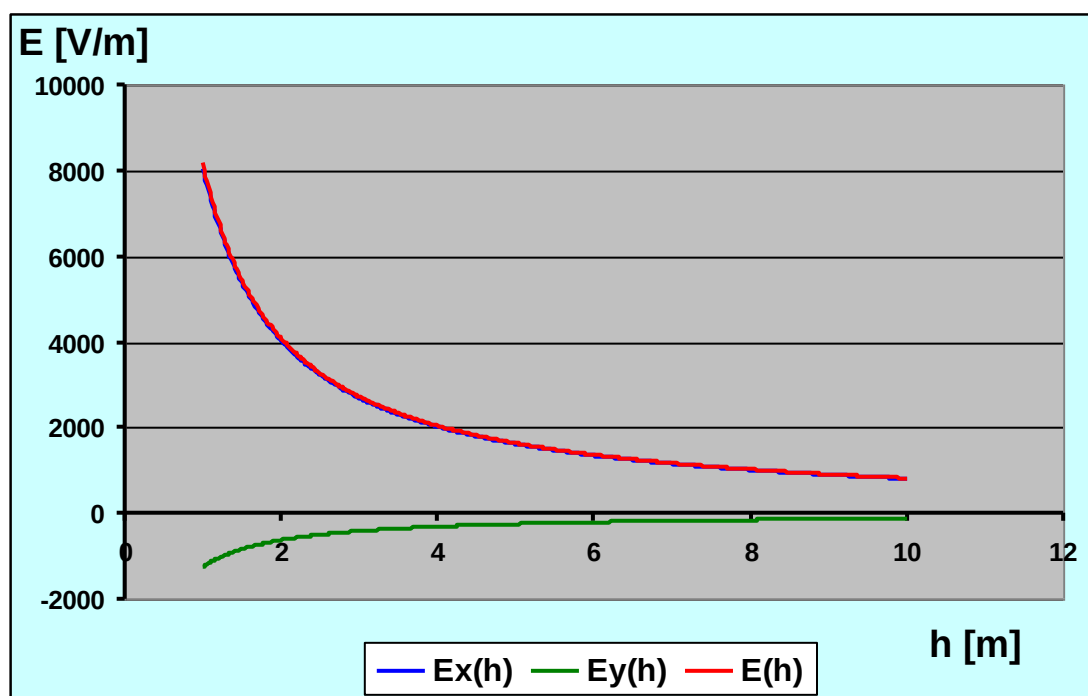
$$\tau = 0,5 [\mu C/m]; h = 2 [m]; s = 7 [m]; L = 10 [m]$$

Вида на изменението на напрегнатостта на електростатичното поле при промяна на дължината на едното „рамо” s на нишката или при отдалечаване от нея h е даден на график 1 и 2 (виж екселския файл) :



Графика 1.

Изменение на E_x , E_y и E при промяна на s от $s_1 = 0[m]$ до $s_2 = 8[m]$



Графика 2.

Изменение на E_x , E_y и E при промяна на h от $h_1 = 1[m]$ до $h_2 = 10[m]$

Решение в Excel

Отговор :

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \text{ [V/m]}, \text{ където : } \alpha_1 = \arctg\left(\frac{s}{h}\right); \alpha_2 = \arctg\left(\frac{L-s}{h}\right)$$