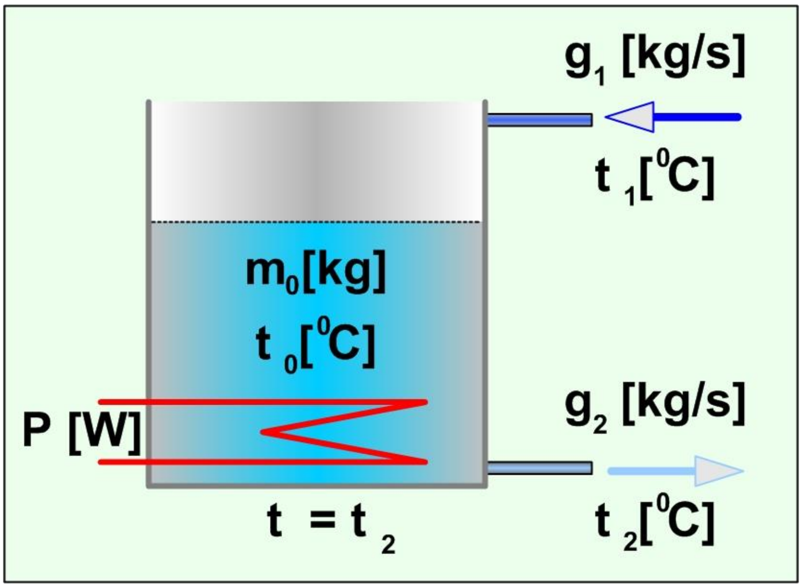
Подгряване на вода в резервоар

Даден е съд с вода с маса m_0 $[kg]$ и температура t_0 $[^\circ C]$. В съда е поставен нагревател с мощност $P\,[W]$. Към съда се подава вода с разход g_1 $[kg/s]$ и температура t_1 $[^\circ C]$, а от него се извежда вода с разход g_2 $[kg/s]$ и температура t_2 $[^\circ C]$ равна на моментната температура в съда ***t***.

Да се изведат законите за изменение $t = f(\tau)$ $[^\circ C]$ и $\tau = f(t)$ $[s]$, когато $g_1 \neq g_2$ (отворен съд) и когато $g_1 = g_2 = g$ (затворен съд, бойлер).



Фиг.1.

Дадено :

1. Резервоар с начална маса на водата $\boldsymbol{m_0}$ [kg], начална температура $\boldsymbol{t_0}$ [°C] и текуща температура ***t*** [°C] ;

2. Нагревател с мощност ***P*** [W];

3. Към резервоара се подава вода с разход $\boldsymbol{g_1}$ [kg/s] и температура $\boldsymbol{t_1}$ [°C];

4. От резервоара се извежда вода с разход $\boldsymbol{g_2}$ [kg/s] и температура $\boldsymbol{t_2}$ [°C] .

Да се намери :

1. За $g_1 \neq g_2$, $t = f(\tau)$ $[^\circ C]$ и $\tau = f(t)$ $[s]$

2. За $g_1 = g_2 = g$, $t = f(\tau)$ $[^\circ C]$ и $\tau = f(t)$ $[s]$

Решение :

Допускаме, че става мигновенна хомогенизация на водата в резервоара. При това $t_2 = t$, където ***t*** е моментната (текуща) температура на водата в резервоара.

1. $g_1 \neq g_2$ **разходите на подаваната и отвеждана вода от резервоара са различни.**

1.1. Диференциално уравнение на *масовия баланс* за резервоара.

Изменението на масата на водата в резервоара за единица време $\frac{dm}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right]$, е в същност разликата между подаваната $g_1\ [kg/s]$ и отвежданата $g_2\ [kg/s]$ вода, тоест :

(1) $\boxed{\frac{dm}{dt} = g_1 - g_2 \left[\frac{kg}{s}\right]}$

Горното диференциално уравнение описва изменението на масана на водата в резервоара.

Разделяме променливите:

(2) $dm = (g_1 - g_2).d\tau\ [kg]$

Интегрираме **(2)** за масата на водата в резервоара ***m*** в граници от ***m₀*** до текущата стойност на ***m***, а за времето ***τ*** от ***0*** до текущата стойност ***τ***.

(3) $\int_{m_0}^{m} dm = \int_{0}^{\tau} (g_1 - g_2).d\tau\ [kg]$

(4) $\boxed{m(\tau) = m_0 + (g_1 - g_2).\tau\ [kg]}$

Уравнение **(4)** е законът, описващ изменението на масата на водата в резервоара, с времето.

1.2. Диференциално уравнение на *топлинния баланс* за резервоара.

Според закона за съхранение на енергията, за един безкрайно малък отрязък от време $d\tau\ [s]$, изменението на енергията $dE\ [J]$ на водата в резервоара ще бъде равно на :

$dE = P.d\tau + c_p.g_1.t_1.d\tau - c_p.g_2.t_2.d\tau\ [J]$, където :

- $P.d\tau\ [J]$ - енергията, внесена в резервоара чрез нагревателя;
- $c_p.g_1.t_1.d\tau\ [J]$ - енергията, внесена в резервоара чрез подаваната вода;
- $c_p.g_2.t_2.d\tau\ [J]$ - енергията, изведена от резервоара чрез изкарваната вода;
- $c_p\left[\frac{J}{kg.K}\right]$ - специфичен топлинен капацитет на водата.

(5) $\boxed{\frac{dE}{d\tau} = P + c_p.g_1.t_1 - c_p.g_2.t \left[\frac{J}{s}\right]}$

Уравнение **(5)** и диференциалното уравнение описващо изменението на енергията на водата в резервоара с времето.

Енергията на водата в резервоара е равна на :

(6) $E = c_p.m.t\ [J]$

Диференцираме **(6)** по части като отчитаме, че променливите са ***m***, ***t*** и ***E***, а c_p е константа:

$$dE = c_p.d(m.t) \ [J]$$

(7) $dE = c_p.(m.dt + t.dm) \ [J]$

Заместваме изразът за dE от **(7)** в **(5)**:

(8) $\dfrac{c_p.(m.dt + t.dm)}{d\tau} = P + c_p.g_1.t_1 - c_p.g_2.t_2 \ \left[\dfrac{J}{s}\right]$

(9) $c_p.\left(m.\dfrac{dt}{d\tau} + t.\dfrac{dm}{d\tau}\right) = P + c_p.g_1.t_1 - c_p.g_2.t_2 \ \left[\dfrac{J}{s}\right]$

Делим двете страни на **(9)** на $\mathbf{c_p}$:

(10) $m.\dfrac{dt}{d\tau} + t.\dfrac{dm}{d\tau} = \dfrac{P}{c_p} + g_1.t_1 - g_2.t_2 \ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

Полагаме : $P' = \dfrac{P}{c_p} \ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

От **(1)** $\dfrac{dm}{d\tau} = g_1 - g_2 \left[\dfrac{kg}{s}\right]$, изразяваме ***m*** от закона за изменение на масата **(4)** $m(t) = m_0 + (g_1 - g_2).\tau \ [kg]$ и заместваме в **(10)** :

(11) $[m_0 + (g_1 - g_2).\tau].\dfrac{dt}{d\tau} + t.(g_1 - g_2) = P' + g_1.t_1 - g_2.t_2 \ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

Поради допускането за мигновена хомогенизация на водата в резервоара $t_2 = t$:

(12) $[m_0 + (g_1 - g_2).\tau].\dfrac{dt}{d\tau} = P' + g_1.t_1 - g_1.t + g_2.t - g_2.t \ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

(13) $\boxed{\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{P' + g_1.(t_1 - t)}{m_0 + (g_1 - g_2).\tau} \ \left[\dfrac{K}{s}\right]}$

Горното диференциално уравнение описва процеса на изменение на температурата t на водата в резервоара с времето τ .

Разделяме променливите.

(14) $\dfrac{dt}{P' + g_1.(t_1 - t)} = \dfrac{d\tau}{m_0 + (g_1 - g_2).\tau} \ \left[\dfrac{s}{kg}\right]$

Интегрираме **(14)** за ***t*** в граници от $\boldsymbol{t_0}$ до текущата стойност на ***t***, а за времето $\boldsymbol{\tau}$ от ***0*** до текущата стойност $\boldsymbol{\tau}$.

(15) $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{-g_1}{-g_1}.\frac{dt}{[P' + g_1.(t_1 - t)]} = \int_{0}^{\tau} \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 - g_2)}.\frac{d\tau}{[m_0 + (g_1 - g_2).\tau]} \ \left[\frac{s}{kg}\right]$

Внасяме $\boldsymbol{-g_1}$ и $\boldsymbol{g_1 - g_2}$ под диференциалите.

(16) $\displaystyle -\frac{1}{g_1}\int_{t_0}^{t} \frac{d(-g_1.t)}{P' + g_1.(t_1 - t)} = \frac{1}{g_1 - g_2}\int_{0}^{\tau} \frac{d[(g_1 - g_2).\tau]}{m_0 + (g_1 - g_2).\tau} \ \left[\frac{s}{kg}\right]$

Кото отчетем в случая, че $\boldsymbol{g_1}$, $\boldsymbol{g_2}$, $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{P`}$ са константи и можем да съберем или извадим функцията под знака на диференциала с константа, без това да промени равенството, защото производната на константа е нула тоест :

$d(-g_1.t) = d[P' + g_1.t_1 - g_1 t] = d[P' + g_1.(t_1 - t)]$ и

$d[(g_1 - g_2).\tau] = d[m_0 + (g_1 - g_2).\tau]$, получаваме :

$$\textbf{(17)}\ -\frac{1}{g_1}\int_{t_0}^{t}\frac{d[P'+.g_1.(t_1-t)]}{[P'+.g_1.(t_1-t)]} = \frac{1}{g_1-g_2}\int_{0}^{\tau}\frac{d[m_0+(g_1-g_2).\tau]}{[m_0+(g_1-g_2).\tau]}\left[\frac{s}{kg}\right]$$

Това са таблични интеграли от вида :

$$\textbf{(18)}\ \int_{x_1}^{x_2}\frac{du(x)}{u(x)} = \ln[u(x_2)] - \ln[u(x_1)] = \ln\left[\frac{u(x_2)}{u(x_1)}\right]$$

Тогава решението на двата интеграла от **(17)** ще бъде :

$$\textbf{(19)}\ -\frac{1}{g_1}.\ln\left[\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right] = \frac{1}{g_1-g_2}.\ln\left[\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0+(g_1-g_2).0}\right]\left[\frac{s}{kg}\right]$$

$$\textbf{(20)}\ \frac{g_2-g_1}{g_1}.\ln\left[\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right] = \ln\left[\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\right]\ [-]$$

Като вземем в предвид, че $a.\ln b = \ln b^a$, внасяме $\dfrac{g_2-g_1}{g_1}$ под логаритъма.

$$\textbf{(21)}\ \ln\left[\left(\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}}\right] = \ln\left[\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\right]\ [-]$$

Антилогаритмуваме **(21)** :

$$\textbf{(22)}\ \left(\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}} = \frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\ [-]$$

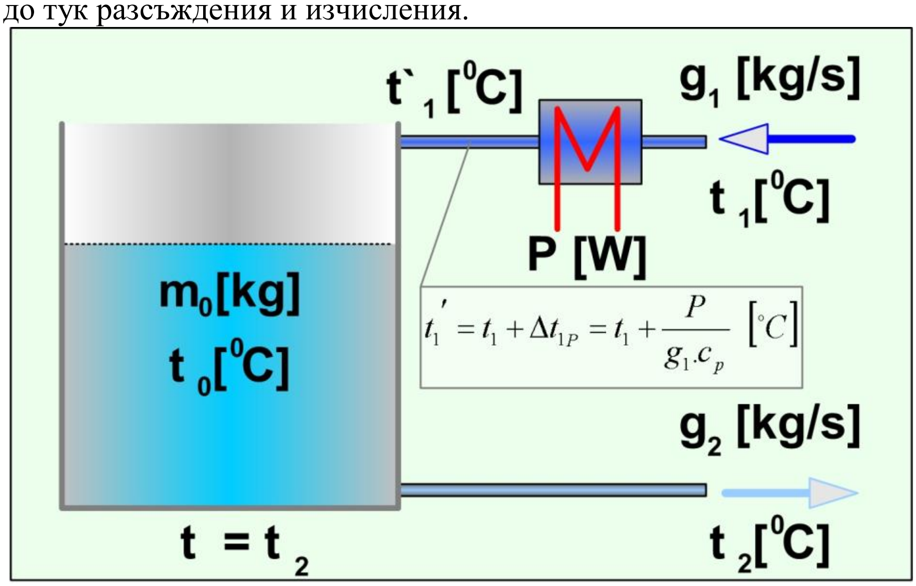
$$\textbf{(23)}\ \left(\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}} = 1 + \frac{(g_1-g_2)}{m_0}.\tau\ [-]$$

$$\textbf{(24)}\ \tau(t) = \frac{m_0}{g_1-g_2}.\left[\left(\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}} - 1\right]\ [s]$$

Заместваме изразът за $P' = \dfrac{P}{c_p}\ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$:

$$\textbf{(25)}\quad \tau(t)=\frac{m_0}{g_1-g_2}.\left[\left(\frac{t_1+\dfrac{P}{g_1.c_p}-t}{t_1+\dfrac{P}{g_1.c_p}-t_0}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}}-1\right]\ [s]$$

Нека сега изменим постановката на задачата, като преместим нагревателя от резервоара, в топлообменник на подаваната вода (фиг.2.). Това не води до промяна на проведените до тук разсъждения и изчисления.



Фиг.2.

В този случай подаваната в резервоара вода ще се загрее във входящият топлообменник с $\Delta t_{1P}=t_1^{'}-t_1\ [^\circ C]$, като според топлинният баланс за него:

$$\textbf{(26)}\quad t_1.c_p.g_1+P=t_1^{'}.c_p.g_1\ [J/s]$$

$$\textbf{(27)}\quad t_1^{'}=t_1+\frac{P}{g_1.c_p}\ [^\circ C]$$

Заместваме $t_1^{'}$ от **(27)** в **(25)**:

$$\textbf{(28)}\quad \tau(t)=\frac{m_0}{g_1-g_2}.\left[\left(\frac{t_1^{'}-t}{t_1^{'}-t_0}\right)^{\frac{g_2-g_1}{g_1}}-1\right]\ [s]$$

В случая $\tau(t)\ [s]$ ще ни даде времето за което, при така зададените $m_0[kg]$, $t_0[^\circ C]$, $t_1[^\circ C]$, $g_1\ [kg/s]$, $g_2\ [kg/s]$ и $P\ [W]$ температурата на резервоара ще се промени от $t_0[^\circ C]$ до определено $t\ [^\circ C]$.

За да намерим $t(\tau)\ [^\circ C]$ преработваме **(22)**:

$$\textbf{(29)}\ \left(\frac{P'+g_1.(t_1-t)}{P'+g_1.(t_1-t_0)}\right)=\left(\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\right)^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[\frac{-}{-}\right]$$

$$\textbf{(30)}\ P'+g_1.(t_1-t)=\left[P'+g_1.(t_1-t_0)\right].\left(\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\right)^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[\frac{kg.K}{s}\right]$$

$$\textbf{(31)}\ P'+g_1.t_1-g_1.t=\left(P'+g_1.(t_1-t_0)\right).\left(\frac{m_0+(g_1-g_2).\tau}{m_0}\right)^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[\frac{kg.K}{s}\right]$$

$$\textbf{(32)}\ t(\tau)=t_1+\frac{P'}{g_1}-\left[\frac{P'+g_1.(t_1-t_0)}{g_1}\right].\left[1+\frac{(g_1-g_2)}{m_0}.\tau\right]^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[{}^{\circ}C\right]$$

Заместваме изразът за $P'=\dfrac{P}{c_p}\ \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$:

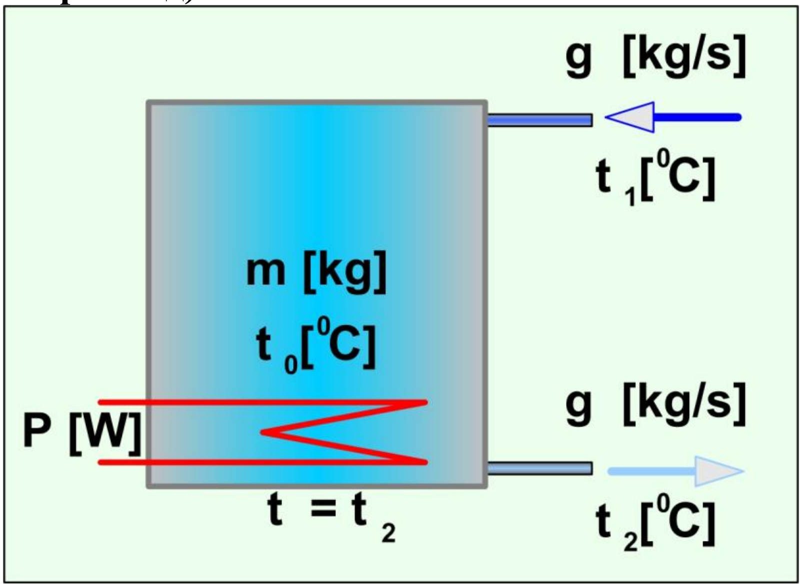
$$\textbf{(33)}\ t(\tau)=t_1+\frac{P}{g_1.c_p}-\left[t_1+\frac{P}{g_1.c_p}-t_0\right].\left[1+\frac{(g_1-g_2)}{m_0}.\tau\right]^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[{}^{\circ}C\right]$$

Заместваме t_1' от **(27)** :

$$\boxed{\textbf{(34)}\ t(\tau)=t_1'-\left(t_1'-t_0\right).\left[1+\frac{(g_1-g_2)}{m_0}.\tau\right]^{\frac{g_1}{g_2-g_1}}\left[{}^{\circ}C\right]}$$

Или в случая $t(\tau)$ $\left[{}^{0}C\right]$ ще ни даде каква ще е температурата t $\left[{}^{\circ}C\right]$ след време τ $[s]$ при така зададените $m_0[kg]$, $t_0\left[{}^{\circ}C\right]$, $t_1\left[{}^{\circ}C\right]$, g_1 $[kg/s]$, g_2 $[kg/s]$ и P $[W]$.

2. $g_1 = g_2$ **разходите на подаваната и отвеждана вода от резервоара са еднакви (затворен съд).**



Фиг.3.

2.1. *Масов баланс* за резервоара.

$g_1 = g_2 = g \;\Rightarrow\; m = const$

2.2. Диференциално уравнение на *топлинния баланс* за резервоара.

$$\boxed{\textbf{(35)}\;\; \frac{dE}{d\tau} = P + c_p.g.t_1 - c_p.g.t \; \left[\frac{J}{s}\right]}$$

Енергията на водата в резервоара е равна на :

(36) $E = c_p.m.t \; [J]$

Диференцираме **(36)** по части като отчитаме, че в случая променливите са t и E, а c_p и **m** са константи.

(37) $dE = c_p.m.dt \; [J]$

Заместваме **(37)** в **(35)**:

(38) $\dfrac{c_p.m.dt}{d\tau} = P + c_p.g.t_1 - c_p.g.t \; \left[\dfrac{J}{s}\right]$

Делим двете страни на **(38)** на $\mathbf{c_p}$:

(39) $m.\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{P}{c_p} + g.t_1 - g.t \; \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

Полагаме : $P' = \dfrac{P}{c_p} \; \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$

$$\boxed{\textbf{(40)}\;\; m.\frac{dt}{d\tau} = P' + g.(t_1 - t) \; \left[\frac{kg.K}{s}\right]}$$

Горното диференциално уравнение описва процеса на изменение на температурата t на водата в резервоара с времето τ .

Разделяме променливите:

(41) $m.\dfrac{dt}{P'+g.(t_1-t)} = d\tau \; [s]$

Интегрираме за ***t*** в граници от ***t₀*** до текущата стойност на ***t***, а за времето ***τ*** от ***0*** до текущата стойност ***τ***.

(42) $\int\limits_{t_0}^{t} m.\dfrac{dt}{P'+g.(t_1-t)} = \int\limits_{0}^{\tau} d\tau \; [s]$

(43) $m.\int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{-g}{-g}.\dfrac{dt}{P'+g.(t_1-t)} = \int\limits_{0}^{\tau} d\tau \; [s]$

Внасяме ***–g₁*** под диференциала:

(44) $\dfrac{m}{-g}.\int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{d(-g.t)}{P'+g.(t_1-t)} = \int\limits_{0}^{\tau} d\tau \; [s]$

Кото отчетем в случая, че ***g***, ***t₁*** и ***P`*** са константи и можем да съберем или извадим функцията под знака на диференциала с константа, без това да промени равенството, защото производната на константа е нула тоест :

$d(-g.t) = d[P'+g.t_1 - g.t] = d[P'+g.(t_1-t)]$, получаваме :

(45) $-\dfrac{m}{g}.\int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{d[P'+g.(t_1-t)]}{P'+g.(t_1-t)} = \int\limits_{0}^{\tau} d\tau \; [s]$

Това е табличен интеграл от вида :

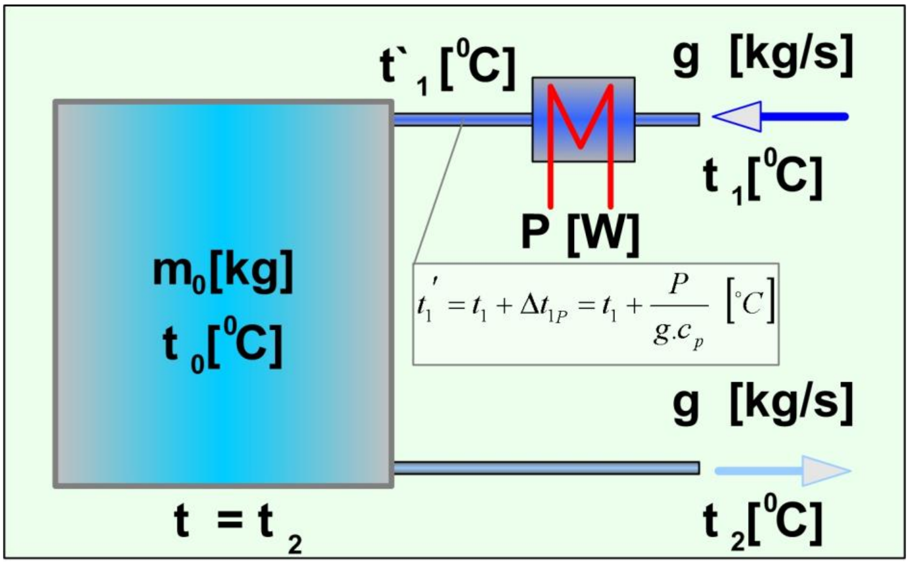
$$\boxed{\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{du(x)}{u(x)} = \ln[u(x_2)] - \ln[u(x_1)] = \ln\left[\frac{u(x_2)}{u(x_1)}\right]}$$

(46) $\tau(t) = -\dfrac{m}{g}.\ln\left[\dfrac{P'+g.(t_1-t)}{P'+g.(t_1-t_0)}\right] \; [s]$

Заместваме изразът за $P' = \dfrac{P}{c_p} \; \left[\dfrac{kg.K}{s}\right]$:

(47) $\tau(t) = -\dfrac{m}{g}.\ln\left[\dfrac{t_1 + \dfrac{P}{g.c_p} - t}{t_1 + \dfrac{P}{g.c_p} - t_0}\right] \; [s]$

Провеждаме аналогични разсъждения, като в предния абзац, като изменяме постановката на задачата, премествайки нагревателя от резервоара, в топлообменник на подаваната вода (фиг.4.). Това не води до промяна на проведените до тук разсъждения и изчисления.



Фиг.4.

В този случай подаваната в резервоара вода ще се загрее във входящият топлообменник с $\Delta t_{1P} = t_1' - t_1$ $[^\circ C]$, като според топлинният баланс за него:

(48) $t_1.c_p.g + P = t_1'.c_p.g \ [J/s]$

(49) $t_1' = t_1 + \dfrac{P}{g.c_p} \ [^\circ C]$

Заместваме t_1' от **(49)** в **(47)**:

(50) $\tau(t) = -\dfrac{m}{g}.\ln\left(\dfrac{t_1' - t}{t_1' - t_0}\right) \ [s]$

Или в случая $\tau(t)$ $[s]$ ще ни даде времето за което, при така зададените $m_0[kg]$, $t_0[^\circ C]$, $t_1[^\circ C]$, $g \ [kg/s]$ и $P\,[W]$ температурата на резервоара ще се промени от $t_0[^\circ C]$ до определено $t \ [^\circ C]$.

За да намерим $t(\tau)$ $[^0C]$ преработваме **(50)**:

(51) $-\dfrac{\tau.g}{m} = .\ln\left(\dfrac{t_1' - t}{t_1' - t_0}\right) \ [-]$

Антилогаритмуваме :

(52) $e^{-\frac{\tau.g}{m}} = \dfrac{t_1' - t}{t_1' - t_0} \ [-]$

(53) $t(\tau) = t_1' - \left(t_1' - t_0\right).e^{-\frac{g}{m}.\tau} \ [^\circ C]$

Или в случая $t(\tau)$ $\left[{}^{\circ}C\right]$ ще ни даде каква ще е температурата t $\left[{}^{\circ}C\right]$ след време τ $[S]$ при така зададените $m_0[kg]$, $t_0\left[{}^{\circ}C\right]$, $t_1\left[{}^{\circ}C\right]$, g $[kg/s]$ и P $[W]$.

Отговор :

1. $g_1 \neq g_2$

$$m(\tau) = m_0 + (g_1 - g_2).\tau \ [kg]$$

$$\tau(t) = \frac{m_0}{g_1 - g_2}.\left[\left(\frac{t_1' - t}{t_1' - t_0}\right)^{\frac{g_2 - g_1}{g_1}} - 1\right] [s]; \ t(\tau) = t_1' - \left(t_1' - t_0\right).\left[1 + \frac{(g_1 - g_2)}{m_0}.\tau\right]^{\frac{g_1}{g_2 - g_1}} \left[{}^{\circ}C\right]$$

2. $g_1 = g_2$

$$\tau(t) = -\frac{m}{g}.\ln\left(\frac{t_1' - t}{t_1' - t_0}\right) [s]; \ t(\tau) = t_1' - \left(t_1' - t_0\right).e^{-\frac{g}{m}.\tau} \ \left[{}^{\circ}C\right]$$

Където $t_1' = t_1 + \dfrac{P}{g.c_p}$ $\left[{}^{\circ}C\right]$.