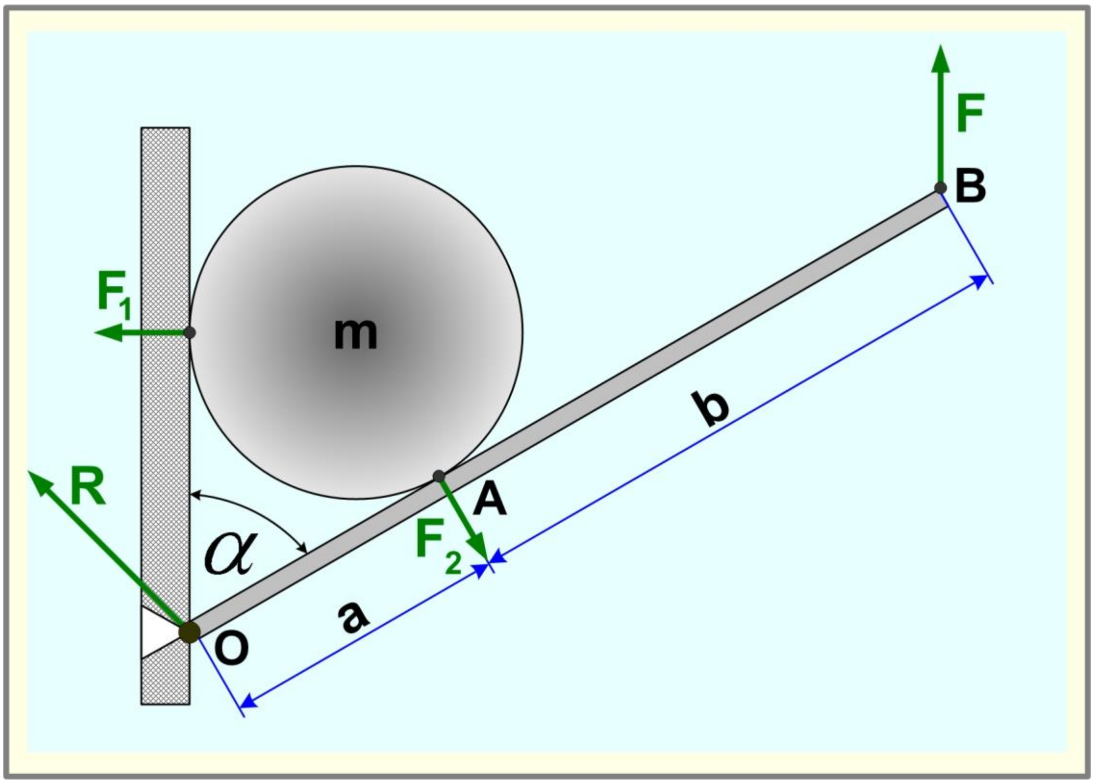
Еднородна сфера с маса $m = 60\ [kg]$ се опира едновременно на идеално гладка вертикална стена и идеално гладък прът **OB**, шарнирно свързан със стената в точка **O** (фиг.1). Ъгълът между пръта и стената е $\alpha = 60^\circ$, $OA = a = 2\ [m]$ и $OB = b = 4\ [m]$. Ако се пренебрегне масата на пръта да се определят:

а) величината на вертикалната сила $F\ [N]$, приложена в точка **B**, така че системата ***сфера – прът*** да остане в равновесие;

б) величината $R\ [N]$ на силата на реакцията в шарнира;

в) величината $F_1\ [N]$ на силата на натиск от страна на сферата върху стената;

г) величината $F_2\ [N]$ на силата на натиск от страна на сферата върху пръта.



Фиг.1.

Дадено :

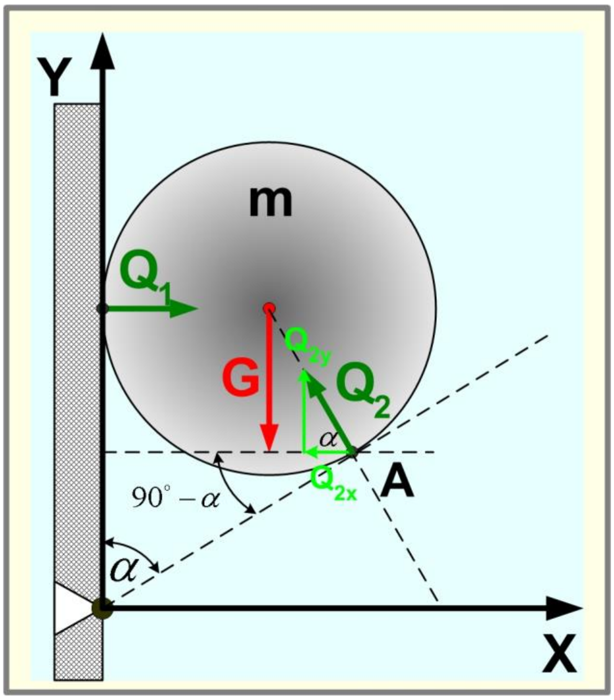
$m = 60\ [kg]$; $\alpha = 60^\circ$; $OA = a = 2\ [m]$; $OB = b = 4\ [m]$

Да се намери :

$F = ?\ [N]$; $R = ?\ [N]$; $F_1 = ?\ [N]$; $F_2 = ?\ [N]$

Решение :

Означаваме действащите върху сферата сили – фиг.2.



Фиг.2.

$\vec{Q}_1$ е силата на реакция от страна на стената към сферата, тя е перпендикулярна на стената в точката на допиране на сферата;

$\vec{Q}_2$ е силата реакция от страна на пръта към сферата, тя е перпендикулярна на пръта в точката **A** на допиране на сферата;

$\vec{G}$ е силата тежестта на сферата.

Записваме първото условие за равновесие на сферата:

(1) $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(1)** върху координатните оси :

(2) $Q_{1x} + Q_{2x} + G_x = 0$

(3) $Q_{1y} + Q_{2y} + G_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$Q_{1x} = Q_1$; $Q_{1y} = 0$

$Q_{2x} = -Q_2.\cos(\alpha)$; $Q_{2y} = Q_2.\sin(\alpha)$

$G_x = 0$; $G_y = -G = -m.g$

Заместваме проекциите на силите в **(2)** и **(3)** :

$Q_1 - Q_2.\cos(\alpha) + 0 = 0 \rightarrow$ **(4)** $Q_1 = Q_2.\cos(\alpha)$

$0 + Q_2.\sin(\alpha) - m.g = 0 \rightarrow$ **(5)** $Q_2 = \dfrac{m.g}{\sin(\alpha)}\ [N]$, заместваме в **(4)**:

$$Q_1 = \frac{m.g}{\sin(\alpha)}.\cos(\alpha)\ [N]$$

(6) $Q_1 = \text{cotg}(\alpha).m.g \ [N]$

Според третият закон на Нютон :

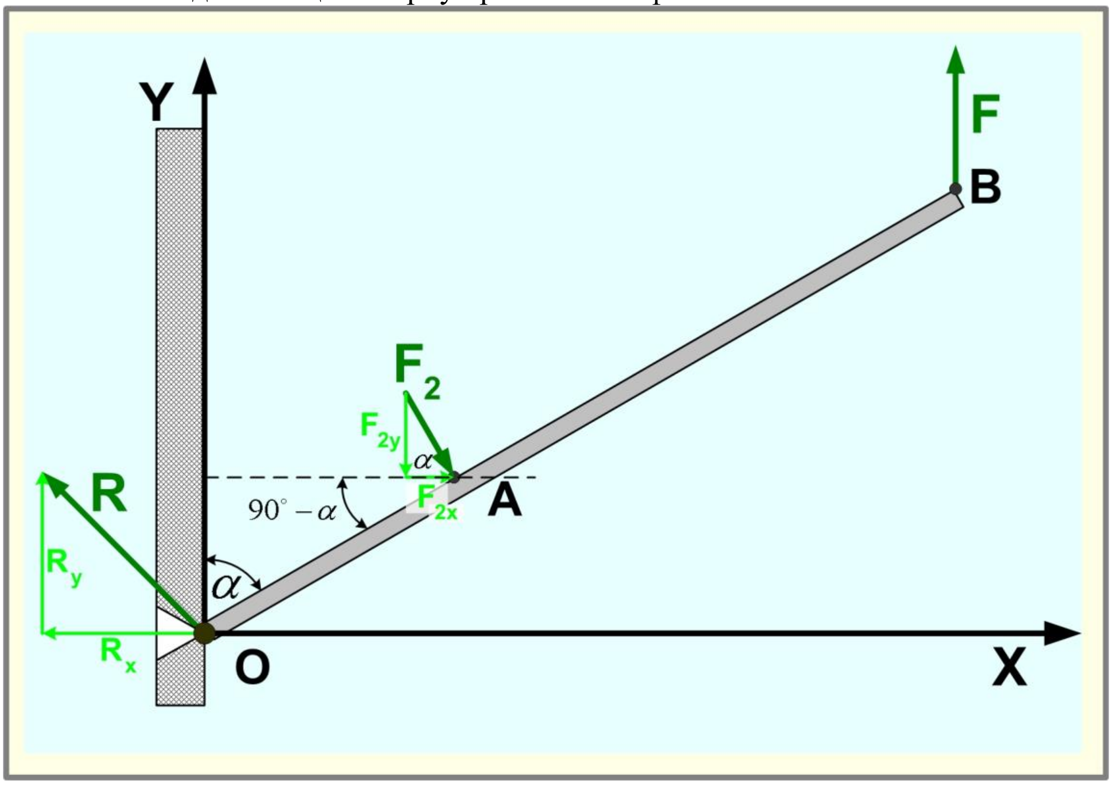
$\vec{Q}_1 = -\vec{F}_1 \ ; \ \vec{Q}_2 = -\vec{F}_2$

Следователно получаваме :

(7) $F_1 = \text{cotg}(\alpha).m.g \ [N]; \ F_1 = \text{cotg}(60^\circ).60.9{,}80665 \ [N]; \ F_1 = 339{,}7123 \ [N]$

(8) $F_2 = \dfrac{m.g}{\sin(\alpha)} \ [N]; \ F_2 = \dfrac{60.9{,}80665}{\sin(60^\circ)} \ [N]; \ F_2 = 679{,}4246 \ [N]$

Означаваме действащите върху пръта сили – фиг.3.



Фиг.3.

$\vec{R}$ е силата на реакция от страна на шарнира към пръта;

$\vec{F}_2$ е силата на натиск от страна на сферата към пръта, тя е перпендикулярна на пръта в точката **A** на допиране на сферата;

$\vec{F}$ е силата приложена към пръта в точка B, така че той да остане в равновесие.

Забележка: пръта няма сила на тежестта, защото според условието на задачата масата му се пренебрегва.

Записваме първото условие за равновесие на пръта:

(9) $\vec{R} + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(9)** върху координатните оси :

(10) $R_x + F_{2x} + F_x = 0$

(11) $R_y + F_{2y} + F_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$F_{2x} = F_2.\cos(\alpha)$; $F_{2y} = -F_2.\sin(\alpha)$

$F_x = 0$; $F_y = F$

$R_x = -R_x$; $R_y = R_y$

Заместваме проекциите на силите в **(10)** и **(11)** :

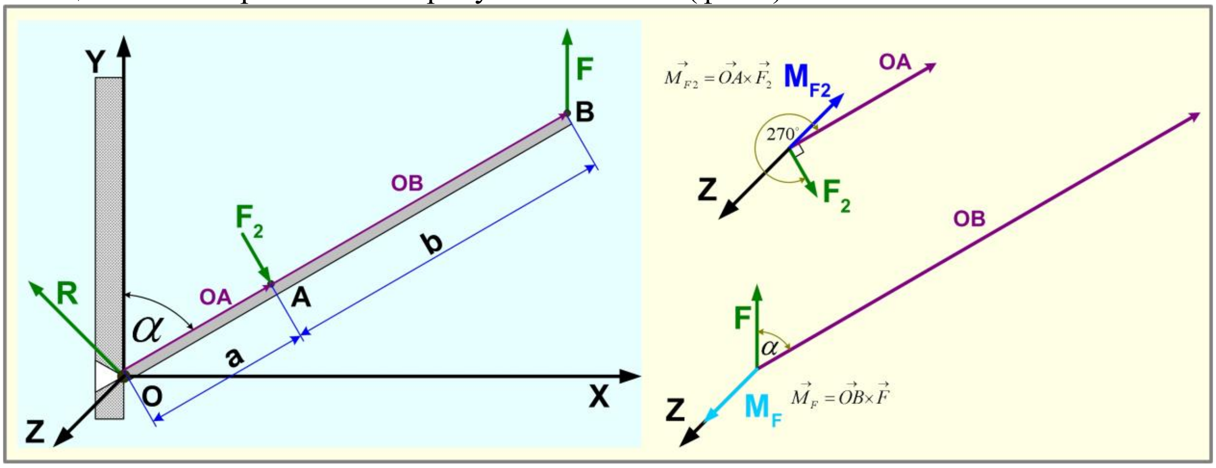
$-R_x + F_2.\cos(\alpha) + 0 = 0 \rightarrow$ **(12)** $R_x = F_2.\cos(\alpha)\ [N]$

$R_y - F_2.\sin(\alpha) + F = 0 \rightarrow$ **(13)** $R_y = F_2.\sin(\alpha) - F$

Ако означим с $\vec{M}_R$, $\vec{M}_{F2}$ и $\vec{M}_F$ моментите създавани съответно от силите $\vec{R}$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}$, то второто условие за равновесие ще има вида :

(14) $\vec{M}_R + \vec{M}_{F2} + \vec{M}_F = 0$

За да определим действащите моменти, избираме ос **Z**, минаваща през точка **O** и имаща посока от равнината на рисунката към нас (фиг.4).



Фиг.4.

При така избраната ос **Z**:

(15) $\vec{M}_R = \vec{0} \times \vec{Q} = \vec{0}$

(16) $\vec{M}_{F2} = \vec{OA} \times \vec{F}_2$; $M_{F2} = OA.F_2.\sin(270^\circ)\ [N.m]$

$OA = a\ [m]$; $\sin(270^\circ) = -1$

(16.1) $M_{F2} = -a.F_2\ [N.m]$

(17) $\vec{M}_F = \vec{OB} \times \vec{F}$; $M_F = OB.F.\sin(\alpha)\ [N.m]$

$OB = a + b\ [m]$

(17.1) $M_F = (a+b).F.\sin(\alpha)\ [N.m]$

Проектираме векторното уравнение **(14)** върху оста **Z** и заместваме **(15)**, **(16.1)** и **(17.1)**:

$$0 - a.F_2 + (a+b).F.\sin(\alpha) = 0\ [N.m]$$

(18) $F = \dfrac{a}{(a+b).\sin(\alpha)}.F_2\ [N]$;

Заместваме изразът за $\mathbf{F_2}$ от **(8)**:

$$F = \frac{a}{(a+b).\sin(\alpha)}.\frac{m.g}{\sin(\alpha)}\ [N]$$

(19) $F = \dfrac{a}{(a+b).\sin^2(\alpha)}.m.g\ [N];$

$$F = \frac{2}{(2+4).\sin^2(60^\circ)}.60.9{,}80665\ [N];\ F = 261{,}5107\ [N]$$

Заместваме изразът за **F** от **(18)** в **(13)** :

$$R_y = F_2.\sin(\alpha) - \frac{a}{(a+b).\sin(\alpha)}.F_2\ [N]$$

$$R_y = \left(\sin(\alpha) - \frac{a}{(a+b).\sin(\alpha)}\right).F_2\ [N];\ R_y = \left(\frac{a.(\sin^2(\alpha)-1) + b.\sin^2(\alpha)}{(a+b).\sin(\alpha)}\right).F_2\ [N]$$

(19) $R_y = \left[\dfrac{b.\sin^2(\alpha) - a.\cos^2(\alpha)}{(a+b).\sin(\alpha)}\right].F_2\ [N]$

Заместваме изразът за $\mathbf{F_2}$ от **(8)** в **(12)** :

$$R_x = F_2.\cos(\alpha) = \frac{m.g}{\sin(\alpha)}.\cos(\alpha)\ [N]$$

(20) $R_x = \mathrm{cotg}(\alpha).m.g\ [N]$

$$R_x = \mathrm{cotg}(60^\circ).60.9{,}80665\ [N];\ R_x = 339{,}7123\ [N]$$

Заместваме изразът за $\mathbf{F_2}$ от **(8)** в **(19)** :

$$R_y = \left[\frac{b.\sin^2(\alpha) - a.\cos^2(\alpha)}{(a+b).\sin(\alpha)}\right].\frac{m.g}{\sin(\alpha)}\ [N]$$

(21) $R_y = \left(\dfrac{b - a.\mathrm{cotg}^2(\alpha)}{a+b}\right).m.g\ [N]$

$$R_y = \left(\frac{4 - 2.\mathrm{cotg}^2(60^\circ)}{2+4}\right).60.9{,}80665\ [N];\ R_y = 326{,}8883\ [N]$$

Реакцията в опората тогава ще е :

(22) $R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}}\ [N]$

$$R = \sqrt{339{,}7123^2 + 326{,}8883^2}\ [N];\ R = 471{,}445\ [N]$$

Отговор :

$F_1 = 339{,}7123\ [N];\ F_2 = 679{,}4246\ [N];$

$F = 261{,}5107\ [N];\ R = 471{,}445\ [N]$