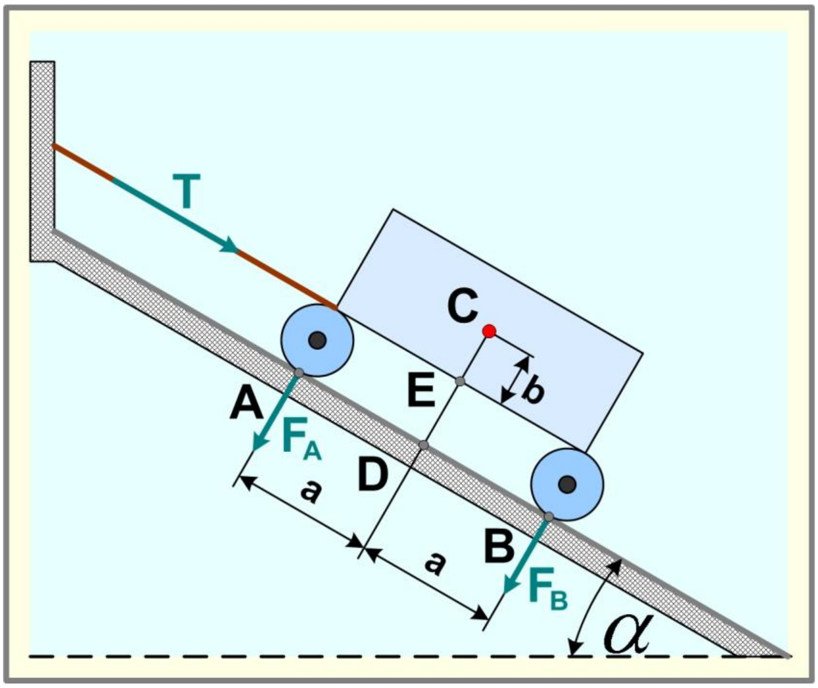
Вагонетка с маса $m = 100\ [kg]$ се задържа върху наклонена плоскост с въже, паралелно на тази плоскост (фиг.1). Определете величината на силите на натиск $F_A\ [N]$ и $F_B\ [N]$ на колелетата на вагонетката, върху плоскостта, в точките **A** и **B** и силата на опън във въжето $T\ [N]$, ако центъра на тежестта на вагонетката се намира в точка **C**, като $AD = DB = a = 0{,}75\ [m]$ и $CE = b = 0{,}3\ [m]$. Ъгъла на наклона на плоскостта спрямо хоризонта е $\alpha = 30^\circ$.



Фиг.1.

Дадено :

$m = 100\ [kg];\ \alpha = 30^\circ$

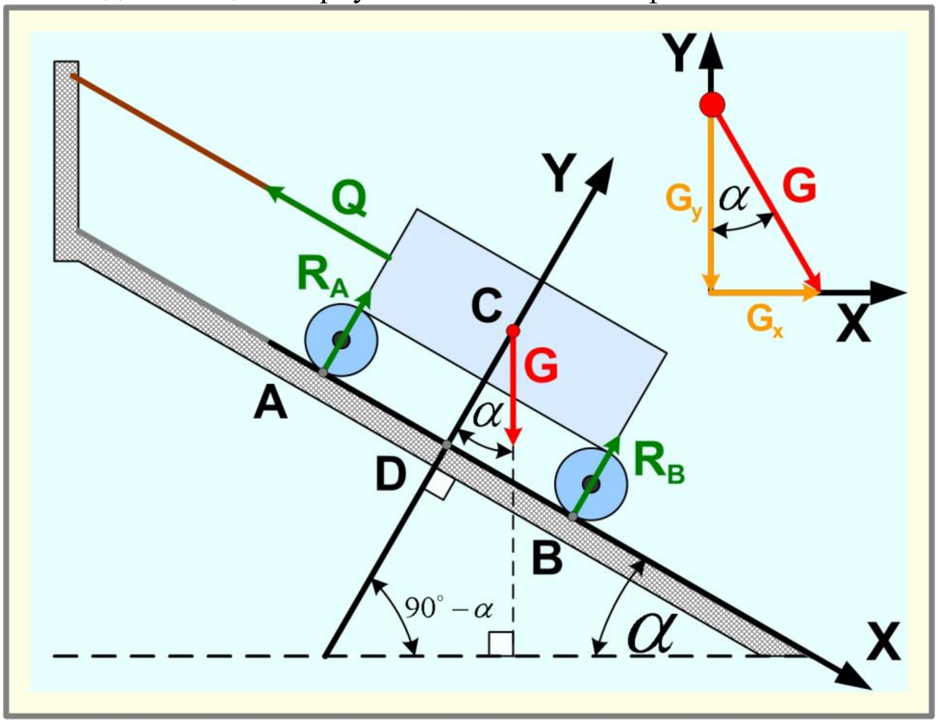
$AD = DB = a = 0{,}75\ [m];\ CE = b = 0{,}3\ [m]$

Да се намери :

$F_A = ?\ [N];\ F_B = ?\ [N];\ T = ?\ [N]$

Решение :

Означаваме действащите върху вагонетката сили – фиг.2.



Фиг.2.

$\vec{R}_A$ е силата на реакция от страна на първото колело на вагонетката;

$\vec{R}_B$ е силата на реакция от страна на второто колело на вагонетката;

$\vec{Q}$ е силата реакция от страна на въжето към вагонетката;

$\vec{G}$ е силата тежестта на гредата.

Записваме първото условие за равновесие на системата:

(1) $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{Q} + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(1)** върху координатните оси :

(2) $R_{Ax} + R_{Bx} + Q_x + G_x = 0$

(3) $R_{Ay} + R_{By} + Q_y + G_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$R_{Ax} = 0;\ R_{Ay} = R_A$

$R_{Bx} = 0;\ R_{By} = R_B$

$Q_x = -Q;\ Q_y = 0$

$G_x = G.\sin(\alpha);\ G_y = -G.\cos(\alpha);\ G = m.g\ [N]$

Заместваме проекциите на силите в **(2)** и **(3)** :

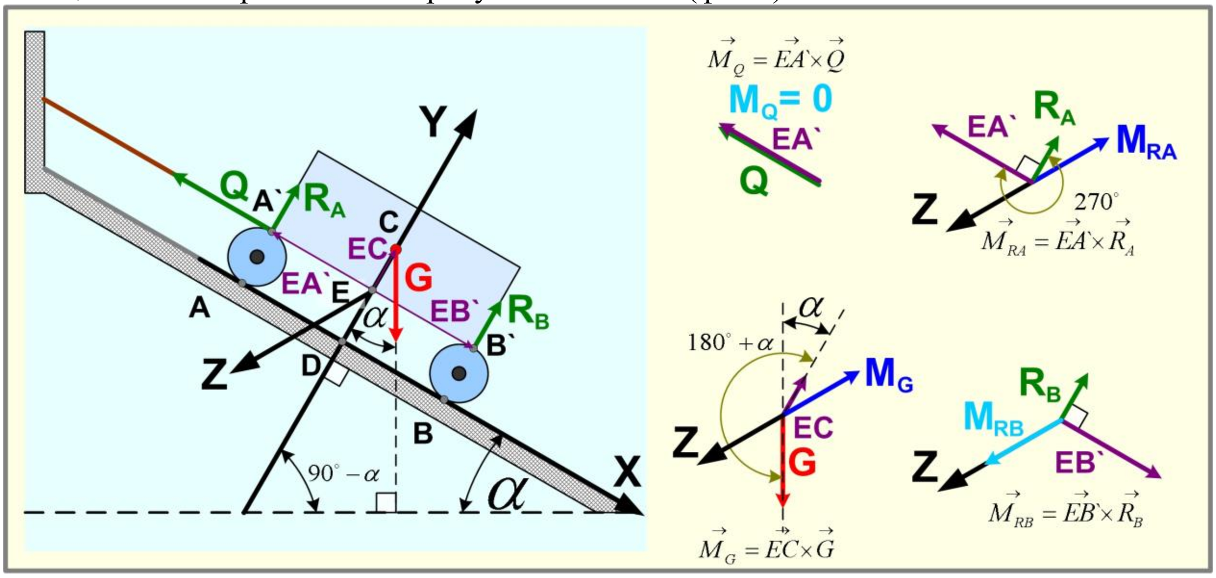
$0 + 0 - Q + G.\sin(\alpha) = 0 \rightarrow$ **(4)** $Q = \sin(\alpha).m.g\ [N]$

$R_A + R_B + 0 - G.\cos(\alpha) = 0 \rightarrow$ **(5)** $R_A + R_B = m.g.\cos(\alpha)\ [N]$

Ако означим с $\vec{M}_{RA}$, $\vec{M}_{RB}$, $\vec{M}_{Q}$ и $\vec{M}_{G}$ моментите създавани съответно от силите $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{Q}$ и $\vec{G}$, то второто условие за равновесие ще има вида :

(6) $\vec{M}_{RA} + \vec{M}_{RB} + \vec{M}_{Q} + \vec{M}_{G} = 0$

За да определим действащите моменти, избираме ос **Z**, минаваща през точка **E** и имаща посока от равнината на рисунката към нас (фиг.3).



Фиг.3.

При така избраната ос **Z**:

(7) $\vec{M}_Q = \vec{EA`} \times \vec{Q}$ ; $M_Q = EA`.Q.\sin(0^\circ) = 0$ $[N.m]$

(8) $\vec{M}_{RA} = \vec{EA`} \times \vec{R}_A$ ; $M_{RA} = EA`.R_A.\sin(270^\circ)$ $[N.m]$

$EA` = a$ $[m]$; $\sin(270^\circ) = -1$

(8.1) $M_{RA} = -a.R_A$ $[N.m]$

(9) $\vec{M}_G = \vec{EC} \times \vec{G}$; $M_G = EC.G.\sin(180^\circ + \alpha)$ $[N.m]$

$EC = b$ $[m]$; $G = m.g$ $[N]$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\boxed{\sin(180^\circ + x) = -\sin(x)}$

(виж таблицата)

(9.1) $M_G = -b.m.g.\sin(\alpha)$ $[N.m]$

(10) $\vec{M}_{RB} = \vec{EB`} \times \vec{R}_B$ ; $M_{RB} = EB`.R_B.\sin(90^\circ)$ $[N.m]$

$EB` = a$ $[m]$; $\sin(90^\circ) = 1$

(10.1) $M_{RB} = a.R_B$ $[N.m]$

Проектираме векторното уравнение **(6)** върху оста **Z** и заместваме **(7)**, **(8.1)**, **(9.1)** и **(10.1)**:

$$-a.R_A + a.R_B + 0 - b.m.g.\sin(\alpha) = 0 \ [N.m]$$

$$a.(R_B - R_A) = b.m.g.\sin(\alpha) \ [N.m]$$

(11) $R_B = R_A + \frac{b}{a}.m.g.\sin(\alpha) \ [N]$

Заместваме R_B от **(11)** в **(5)** :

$$R_A + R_A + \frac{b}{a}.m.g.\sin(\alpha) = m.g.\cos(\alpha) \ [N]$$

(12) $R_A = \frac{[a.\cos(\alpha) - b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g \ [N]$

Заместваме изразът за R_A от **(12)** в **(11)**:

$$R_B = \frac{[a.\cos(\alpha) - b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g + \frac{b}{a}.m.g.\sin(\alpha) \ [N]$$

$$R_B = \left[\frac{a.\cos(\alpha) - b.\sin(\alpha)}{2.a} + \frac{2.b}{2.a}.\sin(\alpha)\right].m.g \ [N]$$

(13) $R_B = \frac{[a.\cos(\alpha) + b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g \ [N]$

Според третият закон на Нютон :

$\vec{Q} = -\vec{T}$; $\vec{R_A} = -\vec{F_A}$; $\vec{R_B} = -\vec{F_B}$

Следователно получаваме :

(14) $T = \sin(\alpha).m.g \ [N]$

(15) $F_A = \frac{[a.\cos(\alpha) - b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g \ [N]$

(16) $F_B = \frac{[a.\cos(\alpha) + b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g \ [N]$

Заместваме с конкретните стойности :

От **(14)** : $Q = \sin(\alpha).m.g = \sin(30^\circ).100.9,80665 \ [N]$

$$Q = 490,3325 \ [N]$$

От **(15)** :

$$F_A = \frac{[a.\cos(\alpha) - b.\sin(\alpha)]}{2.a}.m.g = \frac{[0,75.\cos(30^\circ) - 0,3.\sin(30^\circ)]}{2.0,75}.100.9,80665 \ [N]$$

$$F_A = 326,5739 \ [N]$$

От **(16)** :

$$F_B = \frac{\left[a.\cos(\alpha) + b.\sin(\alpha)\right]}{2.a}.m.g = \frac{\left[0{,}75.\cos\left(30^\circ\right) + 0{,}3.\sin\left(30^\circ\right)\right]}{2.0{,}75}.100.9{,}80665 \; [N]$$

$$F_B = 522{,}7069 \; [N]$$

Отговор : $T = 490{,}3325 \; [N]$; $F_A = 326{,}5739 \; [N]$; $F_B = 522{,}7069 \; [N]$