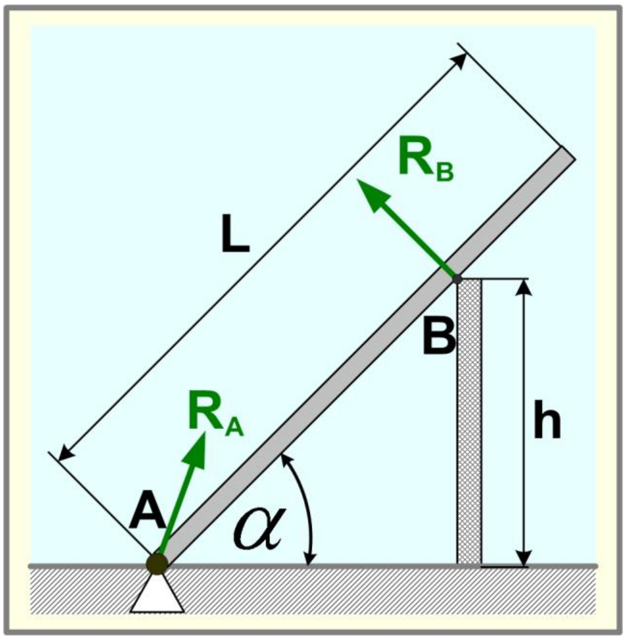
Еднородна гладка греда с маса $m = 100\ [kg]$ и дължина $L = 10\ [m]$ е закрепена в точка **A** с помощта на неподвижен шарнир и същевременно се опира в точка **B** на вертикална стена (фиг.1). Определете силите на реакциите действащи на гредата съответно в точка **A** и **B**. Гредата е поставена под ъгъл $\alpha = 45^\circ$ спрямо хоризонта. Височината на стената е $h = 5\ [m]$.



Фиг.1.

Дадено :

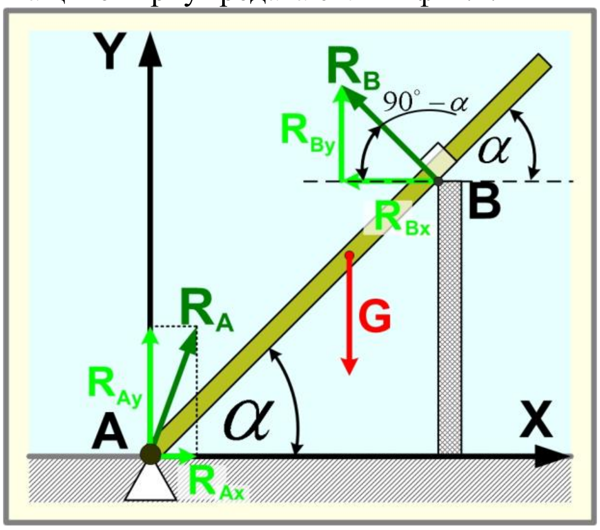
$m = 100\ [kg];\ L = 10\ [m];\ \alpha = 45^\circ;\ h = 5\ [m]$

Да се намери :

$\vec{R}_A\ ;\ \vec{R}_B$

Решение :

Означаваме действащите върху гредата сили – фиг.2.



Фиг.2.

$\vec{R}_A$ е силата на реакция от страна на шарнира към гредата;

$\vec{R}_B$ е силата на реакция от страна на стената към гредата;

$\vec{G}$ е силата тежестта на гредата.

Записваме първото условие за равновесие на системата:

(1) $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(1)** върху координатните оси :

(2) $R_{Ax} + R_{Bx} + G_x = 0$

(3) $R_{Ay} + R_{By} + G_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$R_{Bx} = -R_B.\cos(90^\circ - \alpha) = -R_B.\sin(\alpha)$; $R_{By} = R_B.\sin(90^\circ - \alpha) = R_B.\cos(\alpha)$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$
$\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$

(виж таблицата)

$G_x = 0$; $G_y = -G$; $G = m.g$ $[N]$

Заместваме проекциите на силите в **(2)** и **(3)** :

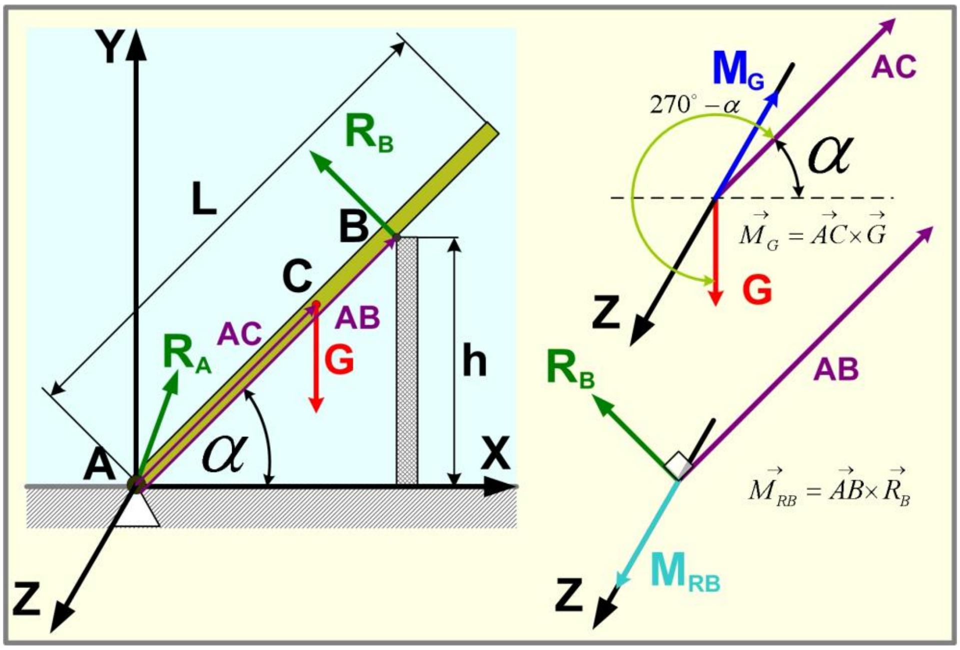
$R_{Ax} - R_B.\sin(\alpha) + 0 = 0 \rightarrow$ **(4)** $R_{Ax} = R_B.\sin(\alpha)$ $[N]$

$R_{Ay} + R_B.\cos(\alpha) - G = 0 \rightarrow$ **(5)** $R_{Ay} = m.g - R_B.\cos(\alpha)$ $[N]$

Ако означим с $\vec{M}_{RA}$, $\vec{M}_{RB}$ и $\vec{M}_G$ моментите създавани съответно от силите $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ и $\vec{G}$, то второто условие за равновесие ще има вида :

(6) $\vec{M}_{RA} + \vec{M}_{RB} + \vec{M}_G = 0$

За да определим действащите моменти, избираме ос **Z**, минаваща през точка **A** и имаща посока от равнината на рисунката към нас (фиг.3).



Фиг.3.

При така избраната ос **Z**:

(7) $\vec{M}_{RA} = \vec{0} \times \vec{R}_A = 0$

(8) $\vec{M}_G = \vec{AC} \times \vec{G}$; $M_G = AC.G.\sin\left(270^\circ - \alpha\right)\ [N.m]$

$AC = \dfrac{L}{2}$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\boxed{\sin\left(270^\circ - x\right) = -\cos(x)}$

(виж таблицата)

(8.1) $M_G = -\dfrac{L}{2}.G.\cos(\alpha)\ [N.m]$

(9) $\vec{M}_{RB} = \vec{AB} \times \vec{R}_B$; $M_{RB} = AB.R_B.\sin\left(90^\circ\right)\ [N.m]$

$\dfrac{h}{AB} = \sin(\alpha) \rightarrow AB = \dfrac{h}{\sin(\alpha)} \rightarrow$

(9.1) $M_{RB} = \dfrac{h}{\sin(\alpha)}.R_B\ [N.m]$

Проектираме векторното уравнение **(6)** върху оста **Z** и заместваме **(7)**, **(8.1)** и **(9.1)**:

$0 + \dfrac{h}{\sin(\alpha)}.R_B - \dfrac{L}{2}.G.\cos(\alpha) = 0\ [N.m]$; $G = m.g\ [N]$

$R_B = \dfrac{L}{2.h}.G.\sin(\alpha).\cos(\alpha)\ [N]$; $\sin(\alpha).\cos(\alpha) = \dfrac{\sin(2.\alpha)}{2} \rightarrow$

(10) $R_B = \dfrac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).m.g\ [N]$

Заместваме изразът за R_B от **(10)** в **(4)** и **(5)**:

$$R_{Ax} = \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).m.g.\sin(\alpha)\ [N]$$

(11) $R_{Ax} = \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).\sin(\alpha).m.g\ [N]$

$$R_{Ay} = m.g - \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).m.g.\cos(\alpha)\ [N]$$

(12) $R_{Ay} = \left(1 - \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).\cos(\alpha)\right).m.g\ [N]$

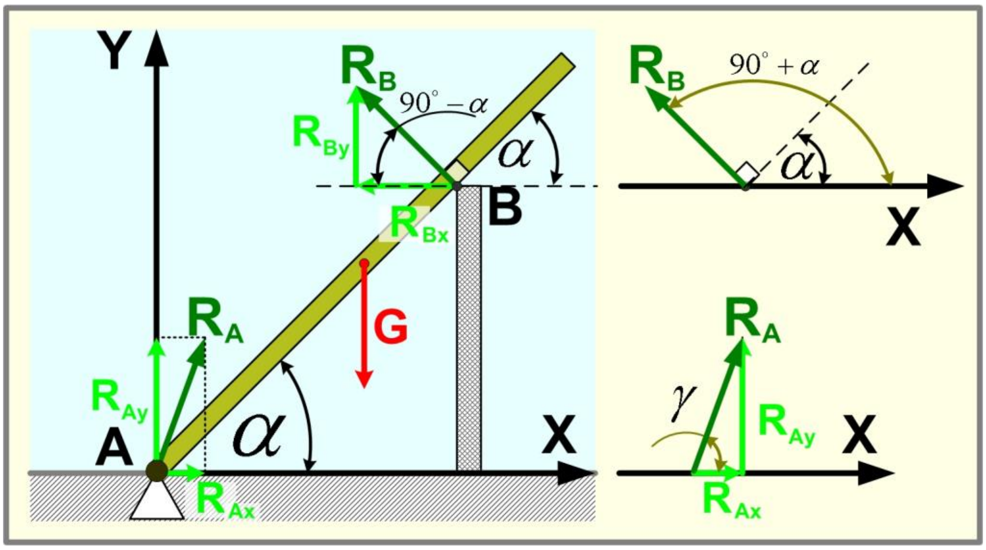
Тогава силата на реакция от страна на шарнира към пръта ще бъде :

(13) $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}\ [N]$

Посоката на $\vec{R_A}$ ще определим от :

(14) $\gamma^\circ = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}\right|\right)$

Определяме посоките на $\vec{R_A}$ и $\vec{R_B}$ спрямо оста **X** фиг.4 :



Фиг.4.

(15) $\angle\left(\vec{R_A}, OX\right) = \gamma$

(16) $\angle\left(\vec{R_B}, OX\right) = 90^\circ + \alpha$

Заместваме с конкретните стойности :

От **(10)** : $R_B = \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).m.g = \frac{10}{4.5}.\sin(2.45^\circ).100.9{,}80665\ [N]$

$R_B = 490{,}3325\ [N]$

От **(11)** : $R_{Ax} = \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).\sin(\alpha).m.g = \frac{10}{4.5}.\sin(2.45^\circ).\sin(45^\circ).100.9{,}80665\ [N]$

$R_{Ax} = 346{,}7174\ [N]$

От **(12)** :

$$R_{A_y} = \left(1 - \frac{L}{4.h}.\sin(2.\alpha).\cos(\alpha)\right).m.g = \left(1 - \frac{10}{4.5}.\sin\left(2.45^\circ\right).\cos\left(45^\circ\right)\right).100.9{,}80665 \; [N]$$

$$R_{A_y} = 633{,}9475 \; [N]$$

От **(13)** : $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{346{,}7174^2 + 633{,}9475^2} \;\; [N]$

$$R_A = 722{,}5666 \; [N]$$

От **(14)** : $\gamma^\circ = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}\right|\right) = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{633{,}9475}{346{,}7174}\right|\right)$

$$\gamma = 61{,}33^\circ$$

От **(15)** : $\angle\left(\vec{R}_A, OX\right) = \gamma = 61{,}33^\circ$

От **(16)** : $\angle\left(\vec{R}_B, OX\right) = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

Отговор :

$R_A = 722{,}5666 \; [N]; \; R_B = 490{,}3325 \; [N]$

$\angle\left(\vec{R}_A, OX\right) = 61{,}33^\circ \; ; \; \angle\left(\vec{R}_B, OX\right) = 135^\circ$