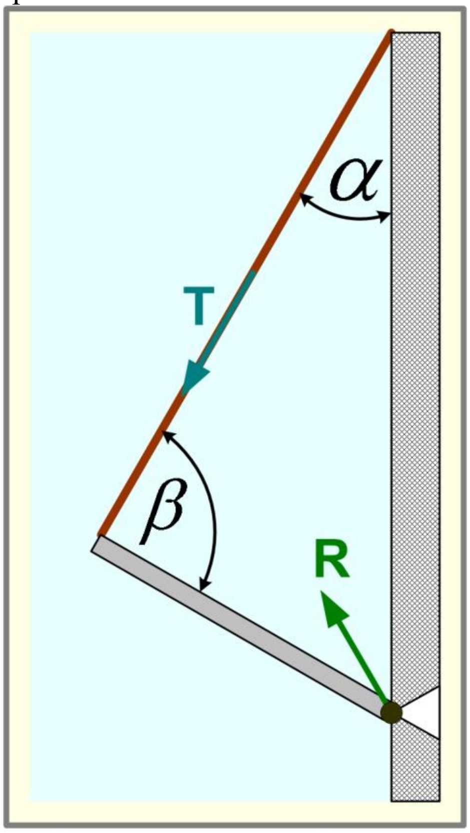
Единият край на еднороден прът с маса $m\ [kg]$ е съединен с вертикална стена чрез шарнир. Другият край на пръта е завързан за въже, което от своя страна е фиксирано на същата тази вертикална стена, като ъгълът между въжето и стената е $\alpha = 30^\circ$. Ъгълът между въжето и пръта е $\beta = 90^\circ$. Да се намери силата на опън $\vec{T}$ във въжето, както и силата на реакция на шарнира $\vec{R}$.



Фиг.1.

Дадено :

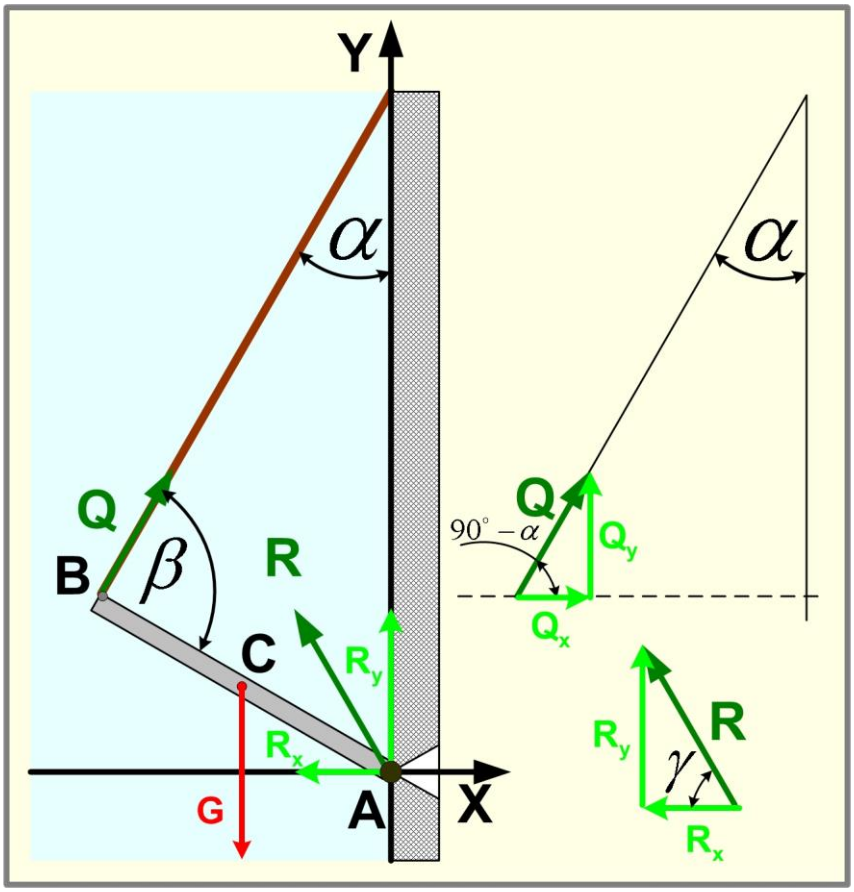
$m\ [kg]; \alpha = 30^\circ;\ \beta = 90^\circ$

Да се намери :

$\vec{T};\ \vec{R}$

Решение :

Означаваме действащите сили – фиг.2.



Фиг.2.

$\vec{Q}$ е силата на реакция от страна на връвта към пръта;

$\vec{R}$ е силата на реакция от страна на шарнира към пръта;

$\vec{G}$ е силата тежестта на пръта.

Записваме първото условие за равновесие на системата:

(1) $\vec{Q} + \vec{R} + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(1)** върху координатните оси :

(2) $Q_x + R_x + G_x = 0$

(3) $Q_y + R_y + G_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$Q_x = Q.\cos(90^\circ - \alpha) = Q.\sin(\alpha)$; $Q_y = Q.\sin(90^\circ - \alpha) = Q.\cos(\alpha)$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$
$\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$

(виж таблицата)

$G_x = 0$; $G_y = -G$

Заместваме проекциите на силите в **(2)** и **(3)** :

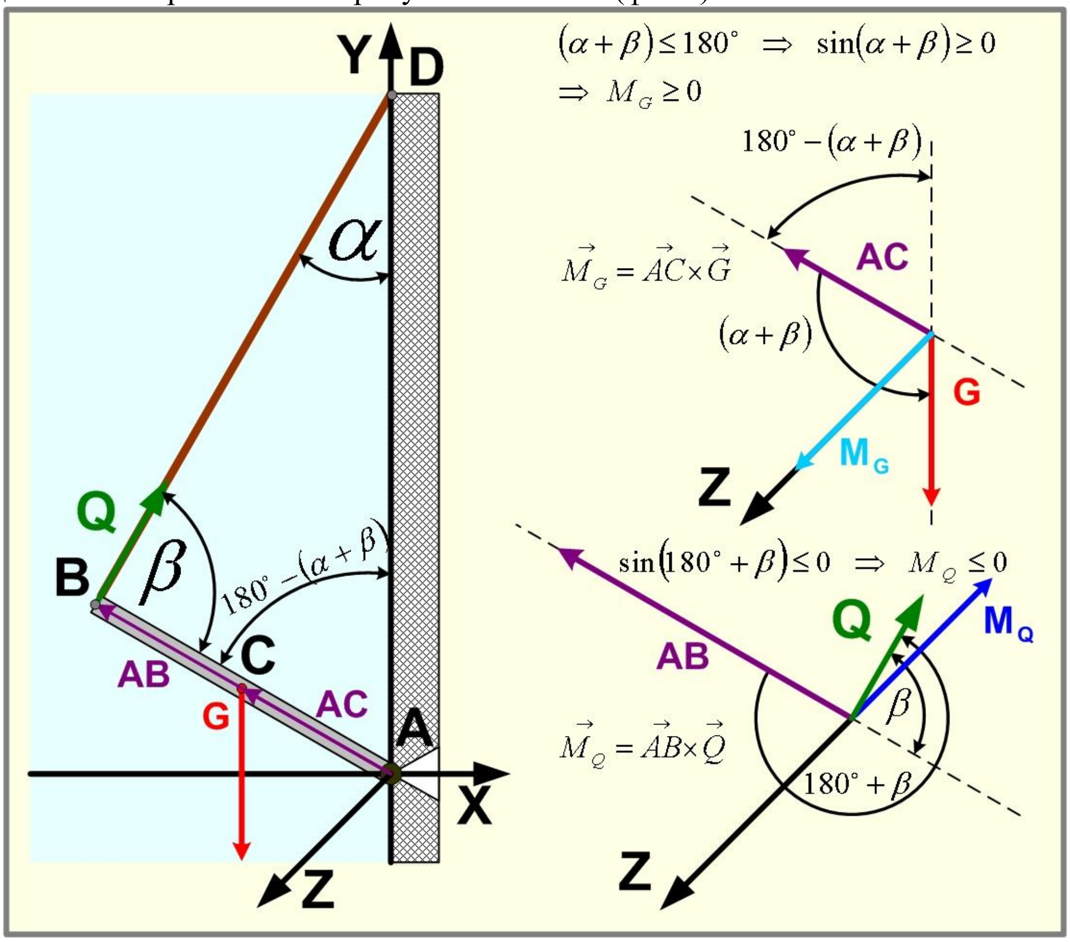
(4) $Q.\sin(\alpha)+R_x+0=0$

(5) $Q.\cos(\alpha)+R_y-G=0$

Ако означим с $\vec{M}_Q$, $\vec{M}_{RX}$, $\vec{M}_{RY}$ и $\vec{M}_G$ моментите създавани съответно от силите $\vec{Q}$, $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ и $\vec{G}$, то второто условие за равновесие ще има вида :

(6) $\vec{M}_Q+\vec{M}_{RX}+\vec{M}_{RY}+\vec{M}_G=0$

За да определим действащите моменти, избираме ос **Z**, минаваща през точка **A** и имаща посока от равнината на рисунката към нас (фиг.3).



Фиг.3.

При така избраната ос **Z**:

(7) $\vec{M}_{RX}=\vec{0}\times\vec{R}_x=0$; $\vec{M}_{RY}=\vec{0}\times\vec{R}_y=0$

(8) $\vec{M}_G=\vec{AC}\times\vec{G}$; $M_G=AC.G.\sin(\alpha+\beta)\ [N.m]\rightarrow AC=\dfrac{AB}{2}$

(9) $M_G=\dfrac{AB}{2}.G.\sin(\alpha+\beta)\ [N.m]$

(10) $\vec{M}_Q=\vec{AB}\times\vec{Q}$; **(10.1)** $M_Q=AB.Q.\sin(180^\circ+\beta)=-AB.Q.\sin(\beta)\ [N.m]$

Проектираме векторното уравнение **(6)** върху оста **Z** и заместваме **(7)**, **(9)** и **(10.1)** :

$$-AB.Q.\sin(\beta)+\frac{AB}{2}.G.\sin(\alpha+\beta)=0\ [N.m]\text{, но } G=m.g\ [N]:$$

(11) $Q=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2.\sin(\beta)}.m.g\ [N]$

Според третият закон на Нютон :

$\vec{Q}=-\vec{T}$

Следователно окончателно получаваме :

(12) $T=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2.\sin(\beta)}.m.g\ [N]$

Заместваме **Q** от **(11)** в **(4)** и **(5)**:

(13) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2.\sin(\beta)}.m.g.\sin(\alpha)+R_x+0=0$;

(14) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2.\sin(\beta)}.m.g.\cos(\alpha)+R_y-m.g=0$

(15) $R_x=-\dfrac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha)}{2.\sin(\beta)}.m.g\ [N]$, знакът „-” показва, че посоката на $\mathbf{R_x}$ е обратна на избраната посока на оста **X**.

(16) $R_y=\left(1-\dfrac{\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha)}{2.\sin(\beta)}\right).m.g\ [N]$

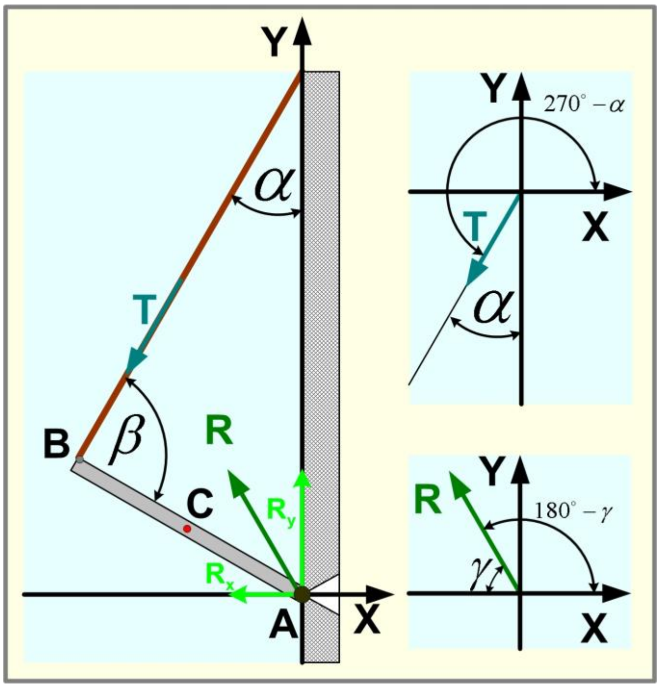
Тогава силата на реакция от страна на шарнира към пръта ще бъде :

(17) $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}\ [N]$

Посоката на $\vec{R}$ ще определим от :

(18) $\gamma^\circ=\mathrm{arctg}\left(\left|\dfrac{R_y}{R_x}\right|\right)$

Определяме посоките на $\vec{T}$ и $\vec{R}$ спрямо оста **X** фиг.4 :



Фиг.4.

Заместваме с конкретните стойности :

От **(12)** : $T = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2.\sin(\beta)}.m.g = \dfrac{\sin(30^\circ+90^\circ)}{2.\sin(90^\circ)}.m.g\ [N]$

$T = 0{,}433.m.g\ [N]$

$\angle\left(\vec{T}, OX\right) = 270^\circ - \alpha = 270^\circ - 30^\circ = 240^\circ$

От **(15)** : $R_x = -\dfrac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha)}{2.\sin(\beta)}.m.g = -\dfrac{\sin(30^\circ+90^\circ).\sin(30^\circ)}{2.\sin(90^\circ)}.m.g\ [N]$

$R_x = -0{,}2165.m.g\ [N]$

От **(16)** : $R_y = \left(1 - \dfrac{\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha)}{2.\sin(\beta)}\right).m.g = \left(1 - \dfrac{\sin(30^\circ+90^\circ).\cos(30^\circ)}{2.\sin(90^\circ)}\right).m.g\ [N]$

$R_y = 0{,}625.m.g\ [N]$

От **(17)** : $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = m.g.\sqrt{0{,}2165^2 + 0{,}625^2}\ [N]$

$R = 0{,}6614.m.g\ [N]$

От **(18)** $\gamma^\circ = \operatorname{arctg}\left(\left|\dfrac{R_y}{R_x}\right|\right) = \operatorname{arctg}\left(\left|\dfrac{0{,}625}{0{,}2165}\right|\right)$

$\gamma^\circ = 70{,}9^\circ$

$\angle\left(\vec{R}, OX\right) = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 70{,}9^\circ = 109{,}1^\circ$

Отговор :

$$T = 0{,}433.m.g\ [N],\ \angle\left(\vec{T}, OX\right) = 240^\circ$$

$$R = 0{,}6614.m.g\ [N];\ \angle\left(\vec{R}, OX\right) = 109{,}1^\circ$$