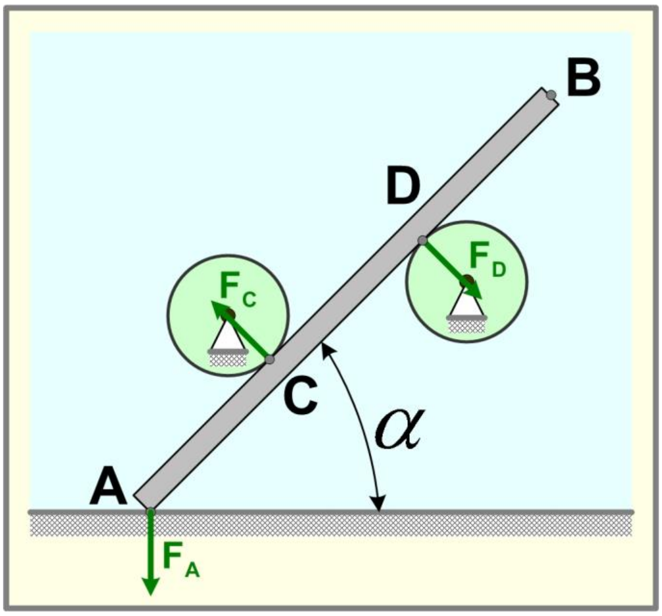
Еднороден прът **AB** с маса $m\ [kg]$ се опира с единият си край **A** на идеално гладка хоризонтална повърхност под ъгъл α, а в точките **C** и **D** на две ролки (фиг.1). Определете величината на силите на натиск $F_A\ [N]$, $F_C\ [N]$ и $F_D\ [N]$ върху повърхността, долната и горната ролка, ако $AC = CD = DB$. Триенето между ролките и пръта да се пренебрегне.



Фиг.1.

Дадено :

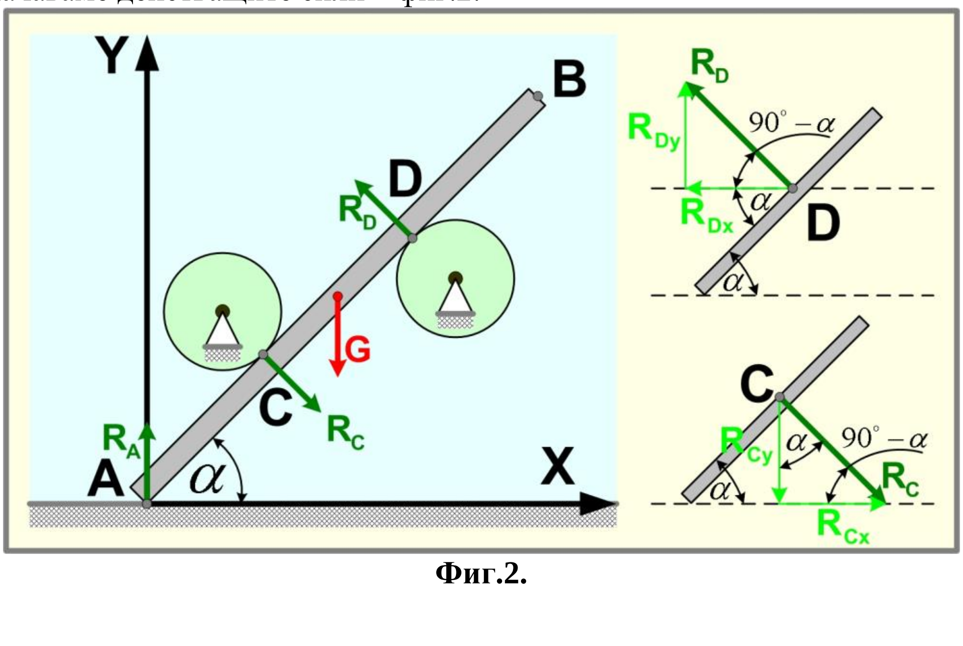
$m\ [kg]$; α; $AC = CD = DB$

Да се намери :

$F_A = ?\ [N]$; $F_C = ?\ [N]$; $F_D = ?\ [N]$

Решение :

Означаваме действащите сили – фиг.2.



Фиг.2.

$\vec{R}_A$ е силата на реакция от страна на хоризонталната повърхност към пръта;

$\vec{R}_C$ е силата на реакция от страна на лявата ролка към пръта;

$\vec{R}_D$ е силата на реакция от страна на дясната ролка към пръта;

$\vec{G}$ е силата тежестта на пръта.

Тъй като хоризонталната повърхност е идеално гладка, сила на триене между нея и пръта няма.

Записваме първото условие за равновесие на системата:

(1) $\vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY** както е показано на фиг.2 и проектираме векторното уравнение **(1)** върху координатните оси :

(2) $R_{Ax} + R_{Cx} + R_{Dx} + G_x = 0$

(3) $R_{Ay} + R_{Cy} + R_{Dy} + G_y = 0$

Намираме проекциите на силите :

$R_{Ax} = 0$; $R_{Ay} = R_A$

$R_{Cx} = R_C.\sin(\alpha)$; $R_{Cy} = -R_C.\cos(\alpha)$

$R_{Dx} = -R_D.\cos(90^\circ - \alpha) = -R_D.\sin(\alpha)$; $R_{Dy} = R_D.\sin(90^\circ - \alpha) = R_D.\cos(\alpha)$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$
$\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$

(виж таблицата)

$G_x = 0$; $G_y = -G$

Заместваме проекциите на силите в **(2)** и **(3)** :

$0 + R_C.\sin(\alpha) - R_D.\sin(\alpha) + 0 = 0 \rightarrow$ **(4)** $R_C = R_D$

(5) $R_A - R_C.\cos(\alpha) + R_D.\cos(\alpha) - G = 0$, заместваме от **(4)** :

$R_A - R_D.\cos(\alpha) + R_D.\cos(\alpha) - G = 0$

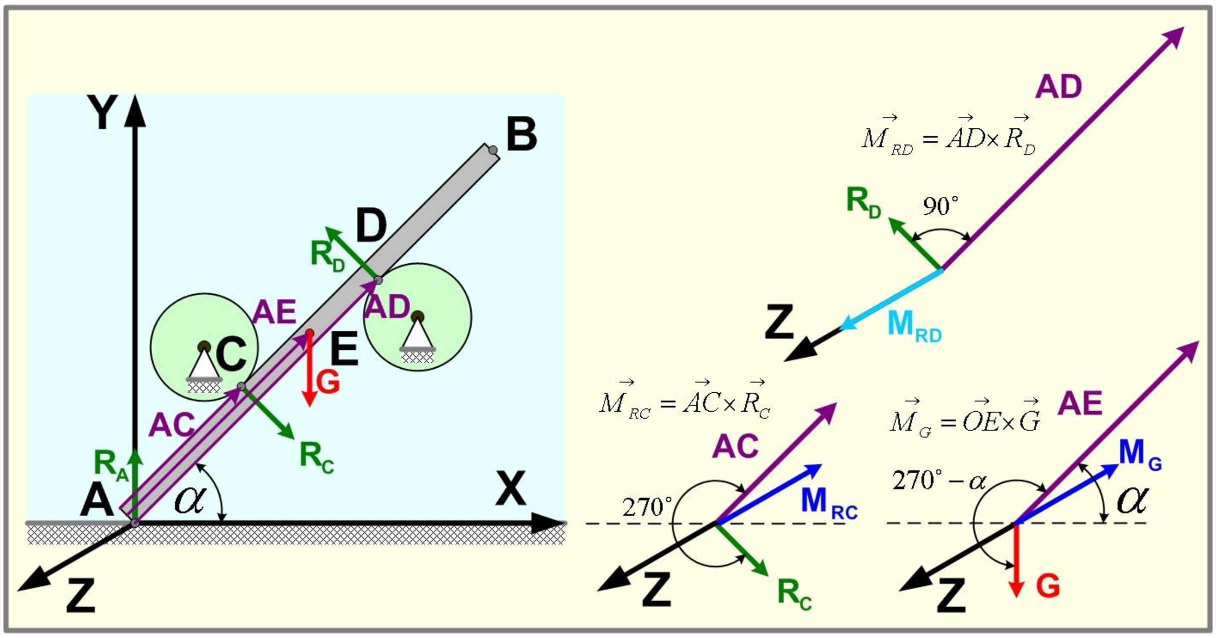
$R_A = G$, но $G = m.g\ [N]$:

(6) $R_A = m.g\ [N]$

Ако означим с $\vec{M}_{RA}$, $\vec{M}_{RC}$, $\vec{M}_{RD}$ и $\vec{M}_G$ моментите създавани съответно от силите $\vec{R}_A$, $\vec{R}_C$, $\vec{R}_D$ и $\vec{G}$, то второто условие за равновесие ще има вида :

(7) $\vec{M}_{RA} + \vec{M}_{RC} + \vec{M}_{RD} + \vec{M}_G = 0$

За да определим действащите моменти, избираме ос **Z**, минаваща през точка **A** и имаща посока от равнината на рисунката към нас (фиг.3). При така избраната ос **Z**:



Фиг.3.

(8) $\vec{M}_{RA} = \vec{0} \times \vec{R}_A = 0$;

(9) $\vec{M}_{RC} = \vec{AC} \times \vec{R}_C$

$M_{RC} = AC.R_C.\sin(270^\circ)$; $AC = \dfrac{AB}{3}$; $\sin(270^\circ) = -1$

(9.1) $M_{RC} = -\dfrac{1}{3}.AB.R_C \; [N.m]$

(10) $\vec{M}_{RD} = \vec{AD} \times \vec{R}_D$; **(10.1)** $M_{RD} = AD.R_D.\sin(90^\circ) = \dfrac{2}{3}.AB.R_D \; [N.m]$

(11) $\vec{M}_G = \vec{OE} \times \vec{G}$; **(11.1)** $M_G = OE.G.\sin(270^\circ - \alpha) = -\dfrac{1}{2}.AB.G.\cos(\alpha) \; [N.m]$

Проектираме векторното уравнение **(7)** върху оста **Z** и заместваме **(8)**, **(9.1)**, **(10.1)** и **(11.1)** :

$$0 - \frac{1}{3}.AB.R_C + \frac{2}{3}.AB.R_D - \frac{1}{2}.AB.G.\cos(\alpha) = 0 \; [N.m]$$

(12) $-\dfrac{1}{3}.R_C + \dfrac{2}{3}.R_D - \dfrac{1}{2}.G.\cos(\alpha) = 0 \; [N]$, заместваме **(4)** $R_C = R_D$:

$-\dfrac{1}{3}.R_C + \dfrac{2}{3}.R_C - \dfrac{1}{2}.G.\cos(\alpha) = 0 \; [N]$, но $G = m.g \; [N]$

(13) $R_C = R_D = \dfrac{3}{2}.\cos(\alpha).m.g \; [N]$

Според третият закон на Нютон :

$\vec{R}_A = -\vec{F}_A$; $\vec{R}_C = -\vec{F}_C$; $\vec{R}_D = -\vec{F}_D$

Следователно окончателно получаваме :

(14) $F_A = m.g \; [N]$

(15) $F_C = F_D = \frac{3}{2}.\cos(\alpha).m.g \ [N]$

Отговор : $F_A = m.g \ [N]; \ F_C = F_D = \frac{3}{2}.\cos(\alpha).m.g \ [N]$