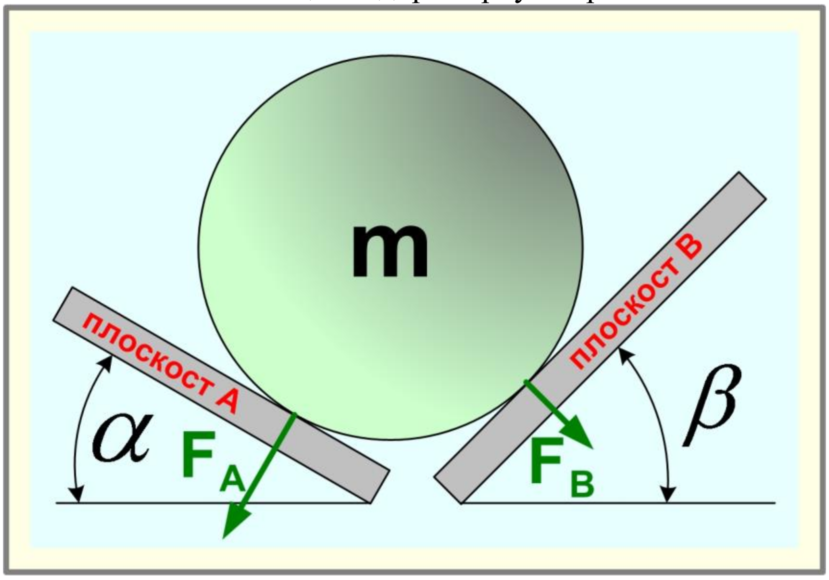
Еднороден цилиндър с маса $m\ [kg]$ е разположен между две гладки еднородни плоскости **A** е **B**, образуващи с хоризонта ъгли съответно α и β (фиг.1). Определете величините на силите на натиск на цилиндъра върху опорните плоскости.



Фиг.1.

Дадено :

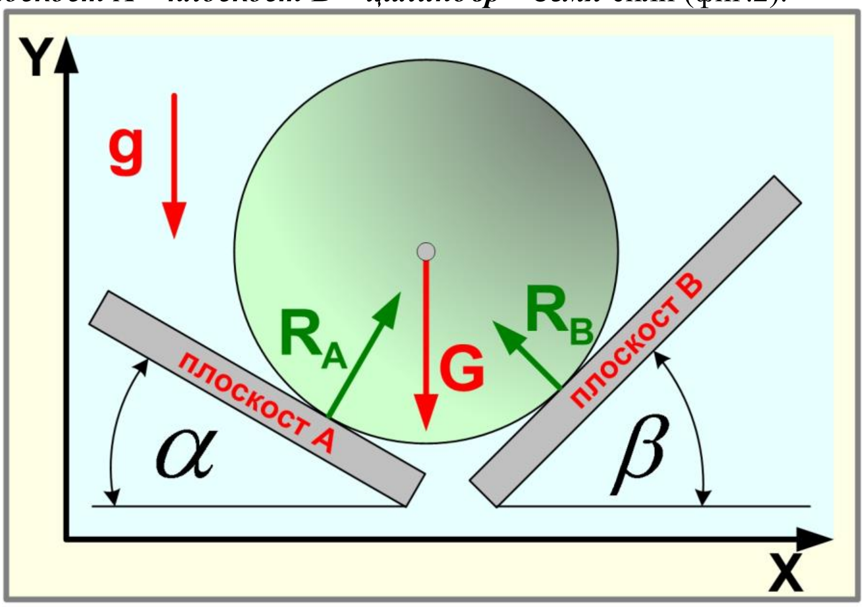
$m\ [kg]$; α ; β

Да се намери :

$F_A = ?\ [N]$; $F_B = ?\ [N]$

Решение :

Тъй като цилиндърът е неподвижен, то силите на реакция от страна на плоскостите са перпендикулярни на самите плоскости. Означаваме действащите върху системата ***плоскост A – плоскост B – цилиндър – Земя*** сили (фиг.2).



Фиг.2.

Записваме първото условие за равновесие на цилиндъра :

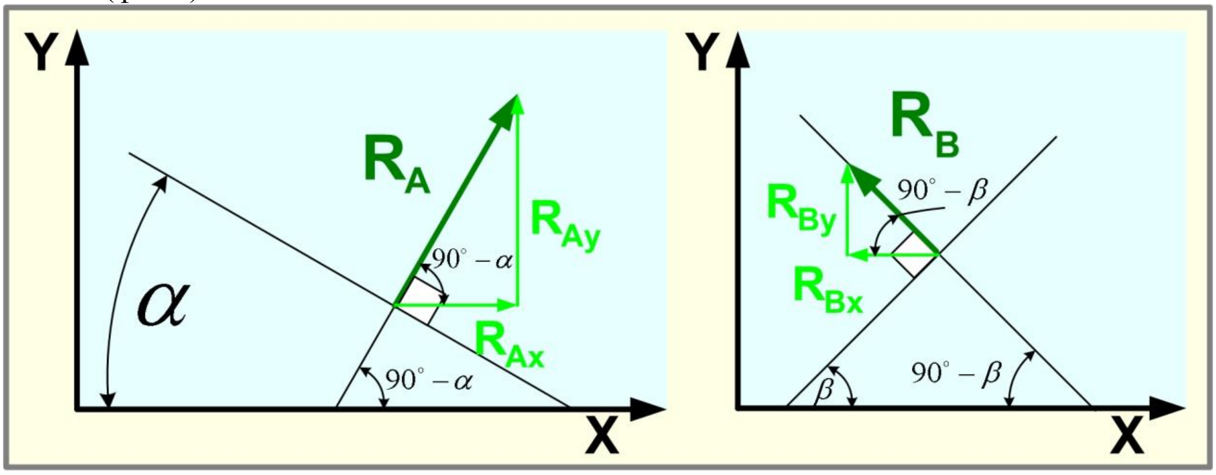
(1) $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} = 0$

Избираме координатна система **XOY**, както е показано на фиг.2, и проектираме векторното уравнение (1) върху избраните оси :

(2) $R_{Ax} + R_{Bx} + G_x = 0$

(3) $R_{Ay} + R_{By} + G_y = 0$

Означаваме ъглите между $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ и избраните оси и намираме проекциите на силите (фиг.3).



Фиг.3.

$R_{Ax} = R_A.\cos(90^\circ - \alpha) = R_A.\sin(\alpha)$; $R_{Ay} = R_A.\sin(90^\circ - \alpha) = R_A.\cos(\alpha)$

$R_{Bx} = -R_B.\cos(90^\circ - \beta) = -R_B.\sin(\beta)$; $R_{By} = R_B.\sin(90^\circ - \beta) = R_B.\cos(\beta)$

Допълващи се тригонометрични функции:

$\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$
$\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$

(виж таблицата)

$G_x = 0$; $G_y = -m.g$

Заместваме проекциите в **(2)** и **(3)**:

(4) $R_A.\sin(\alpha) - R_B.\sin(\beta) + 0 = 0 \rightarrow$ **(4.1)** $R_B = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}.R_A \; [N]$

(5) $R_A.\cos(\alpha) + R_B.\cos(\beta) - m.g = 0$

Заместваме R_B от **(4.1)** в **(5)** :

$$R_A.\cos(\alpha) + \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}.R_A.\cos(\beta) - m.g = 0$$

$$[\cos(\alpha).\sin(\beta) + \sin(\alpha).\cos(\beta)].R_A = m.g.\sin(\beta)$$

Тригонометрични функции на сбор и разлика на два ъгъла:

$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta) \pm \cos(\alpha).\sin(\beta)}$

(виж формулите)

$$\sin(\alpha+\beta).R_A = m.g.\sin(\beta)$$

(6) $R_A = \dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]$

Заместваме R_A от **(6)** в **(4.1)** :

$$R_B = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]$$

(7) $R_B = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]$

Според третият закон на Нютон :

$\vec{R}_A = -\vec{F}_A$; $\vec{R}_B = -\vec{F}_B$

Следователно окончателно получаваме :

$$F_A = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N] \ ; \ F_B = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]$$

Отговор : $F_A = \dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]; \ F_B = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.m.g \ [N]$