Ако е известно, че плътността на водата в дълбочина (при температура $t = 5^{\circ}C$) се апроксимира с точност над 0,01% от квадратното уравнение:

(1) $\rho(x) = \frac{\rho}{1000}.(a.x^2 + b.x + c)\ [kg/m^3]$, където :

(2) $\rho = 1020\ [kg/m^3]$; $a = -4{,}341103.10^{-8}\ [kg/m^5]$; $b = 4{,}891444.10^{-3}\ [kg/m^4]$; $c = 999{,}80004\ [kg/m^3]$

С колко би се повишило нивото на световният океан, ако водата е абсолютно несвиваема?

Данни за световният океан:

Площ : $S = 3{,}6126.10^{14}\ [m^2]$

Обем : $V = 1{,}3366.10^{18}\ [m^3]$

Средна дълбочина : $h_{cp} = 3700\ [m]$

Плътност : $\rho = 1020\ [kg/m^3]$

Решение :

Средната плътност на водата, за средната дълбочина на световния океан h_{cp}, ще определим по формулата :

(3) $\rho_{cp} = \frac{1}{h_{cp}}.\int_0^{h_{cp}} \rho(x).dx\ [kg/m^3]$

Заместваме в **(3)** изразът за $\rho(x)$ от **(1)** :

(3) $\rho_{cp} = \frac{1}{h_{cp}}.\int_0^{h_{cp}} \frac{\rho}{1000}.(a.x^2 + b.x + c).dx\ [kg/m^3]$

Правило за интегриране на константа по функция :

$\int c.f(x).dx = c.\int f(x).dx$, където $c = const$

(виж доказателство на правилото)

Прилагаме правилото в **(3)**, $\frac{\rho}{1000} = const$:

(4) $\rho_{cp} = \frac{1}{h_{cp}}.\frac{\rho_{cp}}{1000}.\int_0^{h_{cp}} (a.x^2 + b.x + c).dx\ [kg/m^3]$

Това е интеграл от вида :

$\int (a.x^2 + b.x + c).dx = a.\frac{x^3}{3} + b.\frac{x^2}{2} + c.x + C$

(виж пресмятането на интеграла)

В граници $x \in [0, h_{cp}]$, интеграла добива вида :

$$\int_0^{h_{cp}} \left(a.x^2 + b.x + c\right) dx = a.\frac{h_{cp}^3 - 0^3}{3} + b.\frac{h_{cp}^2 - 0^2}{2} + c.\left(h_{cp} - 0\right) = a.\frac{h_{cp}^3}{3} + b.\frac{h_{cp}^2}{2} + c.h_{cp}$$

(5) $$\int_0^{h} \left(a.x^2 + b.x + c\right) dx = a.h_{cp}.\left(\frac{h_{cp}^2}{3} + b.\frac{h_{cp}}{2} + c\right)$$

Заместваме **(5)** в **(4)** :

$$\rho_{cp} = \frac{\rho_{cp}}{1000}.\frac{1}{h_{cp}}.h_{cp}.\left(a.\frac{h_{cp}{}^2}{3} + b.\frac{h_{cp}}{2} + c\right) \left[kg/m^3\right]$$

(6) $$\rho_{cp} = \frac{\rho}{1000}.\left(a.\frac{h_{cp}{}^2}{3} + b.\frac{h_{cp}}{2} + c\right) \left[kg/m^3\right]$$

Заместваме с конкретните стойности (виж екселският файл):

(7) $\rho_{cp} = 1028{,}7231 \left[kg/m^3\right]$

При тази плътност световният океан има обем $V = 1{,}3366.10^{18} \left[m^3\right]$. Следователно масата му е равна на :

(8) $m = V.\rho_{cp} \left[kg\right]$

Заместваме с конкретните стойности :

$m = 1{,}3366.10^{18}.1028{,}7231 \left[kg\right]$

(9) $m = 1{,}374491.10^{21} \left[kg\right]$

Ако водата беше несвиваема, същата тази маса щеше да заема следният обем :

(10) $V_{несв} = \dfrac{m}{\rho_{несв}} \left[m^3\right]$, където $\rho_{несв} = \rho = 1020 \left[kg/m^3\right]$

Заместваме с конкретните стойности :

$$V_{несв} = \frac{1{,}374491.10^{21}}{1020} \left[m^3\right]$$

(11) $V_{несв} = 1{,}348031.10^{18} \left[m^3\right]$

Изменението на обема, който заема несвиваемата и свиваема вода ще бъде :

(12) $\Delta V = V_{несв} - V \left[m^3\right]$

Заместваме с конкретните стойности :

$\Delta V = 1{,}348031.10^{18} - 1{,}3366.10^{18} \left[m^3\right]$

(13) $\Delta V = 1{,}143068.10^{16} \left[m^3\right]$

Тогава изменението на нивото на световния океан ще бъде :

(14) $l = \frac{\Delta V}{S}\ \left[m\right]$, където $S = 3{,}6126.10^{14}\ \left[m^2\right]$ е площта на световният океан

Заместваме с конкретните стойности :

$$l = \frac{1{,}143068.10^{16}}{3{,}6126.10^{14}}\ \left[m\right]$$

(15) $l = 31{,}64115\ \left[m\right]$

Отговор : $l = 31{,}64115\ \left[m\right]$