

Да се определи налягането в Марианската падина – дълбочина  $h = 11022 [m]$  и плътност на водата  $\rho_{cp} = 1030 [kg/m^3]$  ако :

**1.** Ако водата е несвиваема и земното ускорение не се променя -  $g = 9,80665 [m/s^2]$ .

**2.** Ако земното ускорение не се променя, а водата е свиваема.

В първо приближение, плътността на водата в дълбочина (при температура  $t = 5^\circ C$ ) се апроксимира с точност над 0,01% от квадратното уравнение :

$$(1) \rho(x) = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) [kg/m^3]$$

$$(2) \rho_{cp} = 1030 [kg/m^3]; \quad a = -4,341103 \cdot 10^{-8} [kg/m^5]; \quad b = 4,891444 \cdot 10^{-3} [kg/m^4]; \\ c = 999,80004 [kg/m^3]$$

**3.** Ако водата е свиваема и земното ускорение се променя по линеен закон от повърхността към центъра на Земята, където е 0, тоест :

$$(3) g(r) = g \cdot \frac{r}{R_3} [m/s^2], \text{ където : } R_3 = 6,37111 \cdot 10^6 [m] \text{ е радиусът на Земята.}$$

## Решение :

**1.** Ако водата е несвиваема и земното ускорение не се променя.

$$(4) P_1 = \rho_{cp} \cdot g \cdot h [Pa]$$

$$\rho = 1030 [kg/m^3]; \quad g = 9,80665 [m/s^2]; \quad h = 11022 [m]$$

$$P = 1030 \cdot 9,80665 \cdot 11022 [Pa]$$

$$P = 111331563 [Pa]$$

$$(5) P_1 = 111,331 [MPa]$$

**2.** Ако водата е свиваема, а земното ускорение не се променя.

Изменението на налягането  $dP [Pa]$  на произволна дълбочина  $x [m]$  при изменението и на дълбочината с  $dx [m]$  се дава от изразът:

$$(6) dP = g \cdot \rho(x) \cdot dx [Pa]$$

Интегрираме диференциалното уравнение (6) като отчетем границите на интегралите :  $P \in [0, P], x \in [0, h]$  :

$$(7) \int_0^P dP = \int_0^h g \cdot \rho(x) \cdot dx [Pa]$$

Заместваме изразът за  $\rho(x)$  от (1) в (7) :

$$(8) P = g \cdot \int_0^h \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) dx [Pa]$$

Правило за интегриране на константа по функция :

$$(9) \int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx, \text{ където } c = const$$

( [ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ПРАВИЛОТО](#) )

Прилагаме правилото н (8)  $\frac{\rho_{cp}}{1000} = const$  :

$$(10) P = \frac{g \cdot \rho_{cp}}{1000} \cdot \int_0^h (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) dx [Pa]$$

Това е интеграл от вида :

$$\int (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) dx = a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2} + c \cdot x + C$$

( [ВИЖ ПРЕСМЯТАНЕТО НА ИНТЕГРАЛА](#) )

В граници  $x \in [0, h]$ , интеграла добива вида :

$$\int_0^h (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) dx = a \cdot \frac{h^3 - 0^3}{3} + b \cdot \frac{h^2 - 0^2}{2} + c \cdot (h - 0) = a \cdot \frac{h^3}{3} + b \cdot \frac{h^2}{2} + c \cdot h$$

$$(11) \int_0^h (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) dx = h \left( a \cdot \frac{h^2}{3} + b \cdot \frac{h}{2} + c \right)$$

Заместваме (11) в (10) :

$$(12) P = \frac{g \cdot \rho_{cp}}{1000} \cdot h \left( a \cdot \frac{h^2}{3} + b \cdot \frac{h}{2} + c \right) [Pa]$$

Заместваме с конкретните стойности ([виж екселският файл](#)):

$$(13) P_2 = 114,01687 [MPa]$$

**3.** Ако водата е свиваема и земното ускорение се променя по линеен закон от повърхността към центъра на Земята ([виж механика/динамика/гравитация](#)).

Земното ускорение се променя по линеен закон от повърхността към центъра на Земята, където е нула, тоест :

$$(14) g(r) = g \cdot \frac{r}{R_3} [m/s^2], \text{ където : } R_3 = 6,37111 \cdot 10^6 [m] \text{ е радиусът на Земята.}$$

На дълбочина  $h = 11022 [m]$ , от повърхността на Земята, ускорението ще бъде :

$$g(r=h) = g \cdot \frac{R_3 - h}{R_3} = g \cdot \left( 1 - \frac{h}{R_3} \right) [m/s^2]$$

$$g(r=h) = 9,80665 \cdot \left( 1 - \frac{11022}{6,37111 \cdot 10^6} \right) = 9,789684 [m/s^2]$$

$$(15) g(x) = d \cdot x + f [m/s^2]$$

Определяме коефициентите  $d$  и  $f$  на линейната функция, описваща изменението на земното ускорение от повърхността на земята  $x = 0$  [m] до дълбочина  $x = h$  [m]:

| $x$ [m]       | $g$ [m/s <sup>2</sup> ] |
|---------------|-------------------------|
| $x_1 = 0$     | $g_1 = 9,80665$         |
| $x_2 = 11022$ | $g_2 = 9,789684$        |

$$(16) d = \frac{g_2 - g_1}{x_2 - x_1}; f = g_1 - d \cdot x_1$$

$$(17) d = -1,5390128810^{-6} [1/s^2]; f = 9,80665 [1/s^2]$$

Изменението на налягането  $dP$  [Pa] на произволна дълбочина  $x$  [m] при изменението на дълбочината с  $dx$  [m] ще се дава от изразът:

$$(18) dP = \rho(x) \cdot g(x) \cdot dx [Pa]$$

Интегрираме диференциалното уравнение (18) като отчетем границите на интегралите :  $P \in [0, P]$ ,  $x \in [0, h]$  :

$$(19) \int_0^P dP = \int_0^h \rho(x) \cdot g(x) \cdot dx [Pa]$$

Заместваме в (19) изразите за  $g(x)$  и  $\rho(x)$  от (15) и (3) :

$$P_3 = \int_0^h \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot (d \cdot x + f) \cdot dx [Pa]$$

$$P = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot \int_0^h [(a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot d \cdot x + (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot f] \cdot dx [Pa]$$

$$(20) P = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot \int_0^h [a \cdot d \cdot x^3 + (b \cdot d + a \cdot f) \cdot x^2 + (c \cdot d + b \cdot f) \cdot x + c \cdot f] \cdot dx [Pa]$$

Правило за интегриране на сума/разлика на две функции :

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$$

( [ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ПРАВИЛОТО](#) )

Прилагаме правилото в (20) :

$$(21) P = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot \left[ \int_0^h a \cdot d \cdot x^3 \cdot dx + \int_0^h (b \cdot d + a \cdot f) \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^h (c \cdot d + b \cdot f) \cdot x \cdot dx + \int_0^h c \cdot f \cdot dx \right] [Pa]$$

Прилагаме правило (9) в (21) :

$$(22) P = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot \left[ a \cdot d \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx + (b \cdot d + a \cdot f) \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx + (c \cdot d + b \cdot f) \cdot \int_0^h x \cdot dx + c \cdot f \cdot \int_0^h dx \right] [Pa]$$

Това са таблични интегрални от вида :

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

( [ВИЖ ДОКАЗАТЕЛСТВОТО НА ИНТЕГРАЛА](#) )

В граници  $x \in [0, h]$ , табличният интеграла добива вида :

$$(23) \int_0^h x^n \cdot dx = \frac{h^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

Прилагаме (23) в (22) :

$$P = \frac{\rho_{cp}}{1000} \cdot \left[ a \cdot d \cdot \frac{h^{3+1}}{3+1} + (b \cdot d + a \cdot f) \cdot \frac{h^{2+1}}{2+1} + (c \cdot d + b \cdot f) \cdot \frac{h^{1+1}}{1+1} + c \cdot f \cdot h \right] [Pa]$$

$$(24) P_3 = \frac{\rho}{1000} \cdot \left[ a \cdot e \cdot \frac{h^4}{4} + (b \cdot e + a \cdot f) \cdot \frac{h^3}{3} + (c \cdot e + b \cdot f) \cdot \frac{h^2}{2} + c \cdot f \cdot h \right] [Pa]$$

Заместваме с конкретните стойности ([виж екселският файл](#)):

$$(25) P_3 = 114,01525 [MPa]$$

**Отговор :**  $P_1 = 111,331 [MPa]$ ;  $P_2 = 114,01687 [MPa]$ ;  $P_3 = 114,01525 [MPa]$